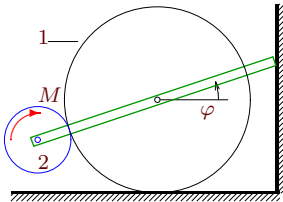


## Уравнение Лагранжа для системы с одной степенью свободы

Курсанов М.Н. **Решебник. Теоретическая механика**/Под ред. А. И. Кириллова.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 384 с. (с.300.)

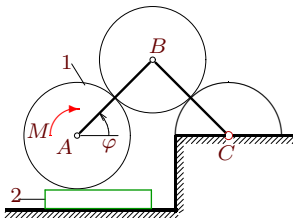
### Задача 30.1.



*Алферов Евгений Александрович*

На оси цилиндра радиусом  $R$ , массой  $m_1$ , шарнирно закреплен стержень длиной  $L$ , скользящий одним концом по вертикальной плоскости. На другом конце стержня шарнирно закреплен диск радиусом  $r$ , катящийся по внешней поверхности цилиндра. К диску приложен момент  $M$ . Качение цилиндра по горизонтальной плоскости происходит без проскальзывания. Масса диска  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .

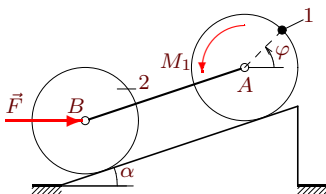
### Задача 30.2.



*Зологин Даниил Владимирович*

Оси цилиндров  $A$  и  $B$  радиусами  $R$ , находящиеся в зацеплении, шарнирно соединены звеном  $AB$ . Цилиндр  $B$  катится по неподвижному цилиндру радиусом  $R$ , цилиндр  $A$  массой  $m_1$  опирается на пластину массой  $m_2$ , скользящую по горизонтальной поверхности. К цилиндру  $A$  приложен момент  $M$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $AB$   $\varphi$ .

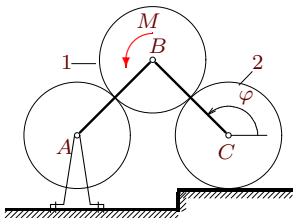
### Задача 30.3.



*Легась Александр Михайлович*

Два цилиндра катятся по плоскости, наклоненной под углом  $\alpha$ . Точка массой  $m_1$  расположена на ободе невесомого цилиндра  $A$  радиусом  $R$ . К оси цилиндра  $B$  радиусом  $R$ , массой  $m_2$ , приложена горизонтальная сила  $F$ . Цилиндры соединены невесомым стержнем длины  $L$ . Момент  $M_1$  приложен к цилиндру  $A$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота  $\varphi$  цилиндра  $A$ .

### Задача 30.4.

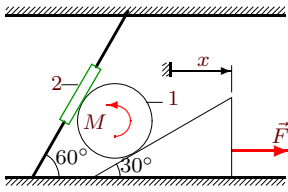


*Мартыненко Марина Викторовна*

Оси цилиндров  $A$ ,  $B$  и  $C$  радиусами  $R$ , находящиеся в зацеплении, соединены двухзвенником  $ABC$ . Цилиндр  $B$  имеет массу  $m_1$ , цилиндр  $C$  —  $m_2$ . Ось цилиндра  $A$  неподвижна. К цилиндру  $B$  приложен момент  $M$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $CB$   $\varphi$ .

**Задача 30.5.**

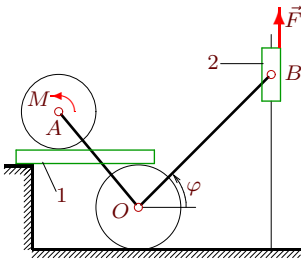
*Филатов Михаил Сергеевич*



Цилиндр радиусом  $R$  зажат между муфтой, надетой на наклонный стержень, и призмой, скользящей по гладкой горизонтальной поверхности. Масса цилиндра  $m_1$ , муфты —  $m_2$ . К цилиндру приложен момент  $M$ , к призме — горизонтальная сила  $F$ . Проскальзывание в точках контакта цилиндра отсутствует. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять  $x$ .

**Задача 30.6.**

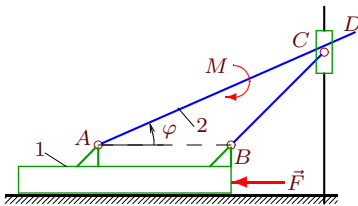
*Чалов Павел Сергеевич*



Цилиндр радиусом  $R$  соединен стержнем  $OB$  с вертикально движущейся муфтой. Горизонтальная пластина, находящаяся в зацеплении с цилиндром, левым концом скользит по гладкой опоре. По пластине катится диск радиусом  $r$ . Оси цилиндра и диска соединены стержнем  $OA$ . К муфте приложена вертикальная сила  $\vec{F}$ , к диску — момент  $M$ ;  $OA = a$ ,  $OB = b$ . Масса пластины равна  $m_1$ , масса муфты —  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $OB$   $\varphi$ .

**Задача 30.7.**

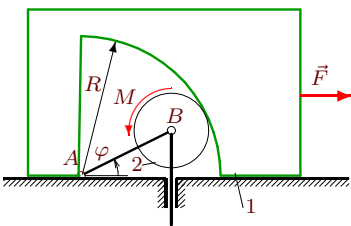
*Гайворонский Михаил*



Стержень  $BC$  длины  $a$  шарнирно соединяет горизонтально скользящую платформу и вертикальный ползун  $C$ . Стержень  $AD$ , шарнирно закрепленный на платформе, опирается на ось  $C$  ползуна и скользит по ней,  $AB = BC = a$ . Масса платформы равна  $m_1$ , стержня  $AD$  —  $m_2$ . К стержню  $AD$  приложен момент  $M$ , к платформе — горизонтальная сила  $F$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $AD$   $\varphi$ .

**Задача 30.8.**

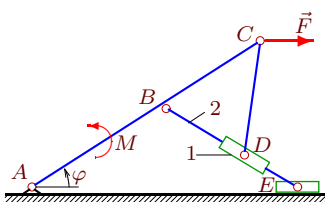
*Столяров Дмитрий*



Груз массой  $m_1$ , имеющий вырез цилиндрической формы радиусом  $R$ , скользит по горизонтальной поверхности. Диск радиусом  $r$ , закрепленный на вертикальном штоке, катится без проскальзывания по поверхности выреза. Центр диска шарнирно закреплен на стержне  $AB$  длиной  $R - r$ . К диску приложен момент  $M$ , к грузу — сила  $F$ . Масса диска —  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .

**Задача 30.9.**

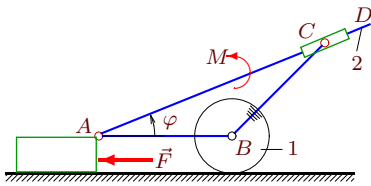
*Терентьев Антон*



Стержень  $AC$  шарнирно соединен со стержнем  $BE$ , а шарнир  $C$  стержнем  $DC$  соединен с муфтой, скользящей по  $BE$ . Ползун  $E$  скользит по гладкой поверхности. К стержню  $AC$  приложен момент  $M$ , к шарниру  $C$  — горизонтальная сила  $F$ ;  $AB = BE = a$ ,  $BC = CD = b$ . Масса муфты равна  $m_1$ , стержня  $BE$  —  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $AC$   $\varphi$ .

**Задача 30.10.**

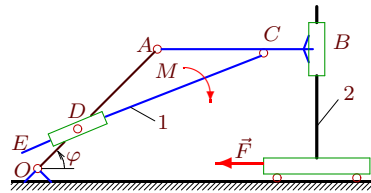
*Анисимов Артемий*



Стержень  $AD$  длины  $2a$  скользит в муфте  $C$ , шарнирно закрепленной на конце стержня  $BC = a$ , жестко скрепленного с диском массой  $m_1$  радиусом  $R$ . Ось диска соединена невесомым стержнем с призмой, скользящей по горизонтальной плоскости. Масса стержня  $AD$  равна  $m_2$ . К стержню  $AD$  приложен момент  $M$ , к призме — горизонтальная сила  $F$ ,  $AB = a$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $AD$   $\varphi$ .

**Задача 30.11.**

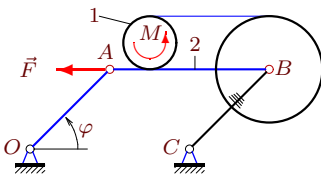
*Вальтер Виктор*



Горизонтальный стержень  $AB$  жестко соединен с муфтой  $B$ . Муфта скользит по вертикальному стержню, установленному на подвижной тележке. На кривошипе  $OA$  длиной  $a$  закреплена качающаяся муфта  $D$ , в которой скользит стержень  $CE$ , шарнирно прикрепленный к стержню  $AB$ . Масса стержня  $CE$  равна  $m_1$ , тележки вместе с вертикальным стержнем —  $m_2$ ;  $AC = AD = b$ ,  $CE = L$ . К стержню  $CE$  приложен момент  $M$ , к тележке — горизонтальная сила  $F$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа  $\varphi$ .

**Задача 30.12.**

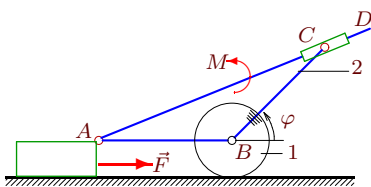
*Галимов Руслан*



На горизонтальном стержне  $AB$  шарнирного параллелограмма  $OABC$  расположен цилиндр радиусом  $r$ , массой  $m_1$ , связанный нитью с цилиндром  $B$  радиусом  $2r$ . Стержень  $BC$  жестко соединен с цилиндром  $B$ . К меньшему цилиндру приложен момент  $M$ , к шарниру  $A$  — горизонтальная сила  $\vec{F}$ ;  $OA = CB = a$ . Масса стержня  $AB$  равна  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол  $\varphi$ .

**Задача 30.13.**

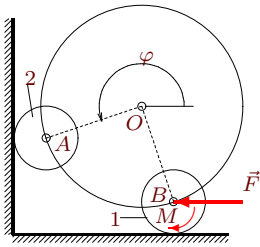
*Ковалев Кирилл*



Стержень  $AD$  длины  $2a$  скользит в муфте  $C$ , шарнирно закрепленной на конце стержня  $BC = a$ , жестко скрепленного с диском массой  $m_1$  радиусом  $R$ . Ось диска соединена невесомым стержнем с призмой, скользящей по горизонтальной плоскости. Масса стержня  $BC$  равна  $m_2$ . К стержню  $AD$  приложен момент  $M$ , к призме — горизонтальная сила  $F$ ,  $AB = a$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $BC$   $\varphi$ .

**Задача 30.14.**

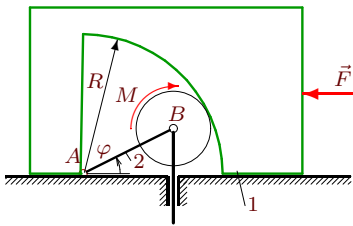
*Собиров Хасанжон*



Оси цилиндров одинакового радиуса  $r$  расположены на ободе диск радиусом  $R = 4r$ ,  $AO \perp BO$ . Цилиндр 1 массой  $m_1$  катится по горизонтальной плоскости, другой цилиндр массой  $m_2$  — по вертикальной. К оси цилиндра 1 приложена горизонтальная сила  $F$ . Момент  $M$  приложен к цилиндру. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота диска  $\varphi$ .

**Задача 30.15.**

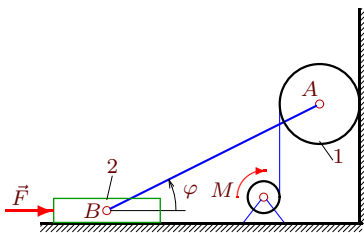
*Хайруллин Булат*



Груз массой  $m_1$ , имеющий вырез цилиндрической формы радиусом  $R$ , скользит по горизонтальной поверхности. Диск радиусом  $r$ , закрепленный на вертикальном штоке, катится без проскальзывания по поверхности выреза. Центр диска шарнирно закреплен на стержне  $AB$  длиной  $R - r$ . К диску приложен момент  $M$ , к грузу — сила  $F$ . Масса стержня —  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .

**Задача 30.16.**

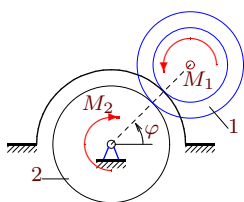
*Шпагина Диана*



На одном конце стержня  $AB$  длиной  $a$  шарнирно закреплен ползун  $B$ , скользящий по горизонтальной поверхности, на другом — цилиндр радиусом  $R$ , массой  $m_1$ . Цилиндр катится по вертикальной стенке. Вертикальная нить огибает цилиндр и диск радиусом  $r$ , закрепленный на основании. Масса ползуна  $B$  равна  $m_2$ . К диску приложен момент  $M$ , к ползуну — горизонтальная сила  $F$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .

**Задача 30.17.**

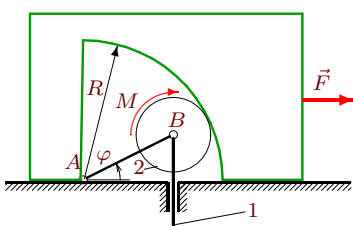
*Самсонов Артемий Олегович*



По цилиндрической поверхности радиусом  $R$  катится внутренним ободом радиуса  $r_1$  блок массой  $m_1$ . Своим внешним ободом блок касается цилиндра массой  $m_2$ , приводя его во вращение. К цилиндру приложен момент  $M_2$ , к блоку —  $M_1$ . Момент инерции блока  $J$ , радиус цилиндра  $r_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол  $\varphi$ .

**Задача 30.18.**

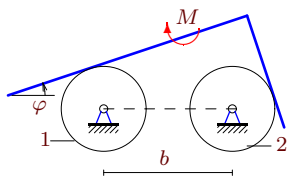
*Кашинцев Александр Станиславович*



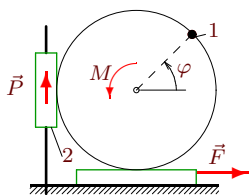
Груз, имеющий вырез цилиндрической формы радиусом  $R$ , скользит по горизонтальной поверхности. Диск радиусом  $r$ , закрепленный на вертикальном штоке массой  $m_1$ , катится без проскальзывания по поверхности выреза. Центр диска шарнирно закреплен на стержне  $AB$  длиной  $R - r$ . К диску приложен момент  $M$ , к грузу — сила  $F$ . Масса диска —  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .

**Задача 30.19.***Лукашев Роман Алексеевич*

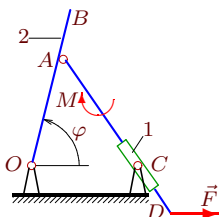
Невесомый уголок, составленный из двух жестко соединенных взаимно перпендикулярных стержней, опирается без проскальзывания на два диска радиусов  $R$  с неподвижными осями. Расстояние между осями, находящимися на одной высоте, равно  $b$ . Массы дисков  $m_1$  и  $m_2$ . К уголку приложен момент  $M$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота уголка  $\varphi$ .

**Задача 30.20.***Максимов Илья Владимирович*

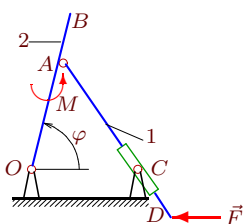
Цилиндр радиусом  $R$  катится без проскальзывания по горизонтальной пластине, расположенной на гладкой поверхности, и по боковой грани муфты, надетой на гладкую вертикальную стойку. На ободе цилиндра закреплена точка массой  $m_1$ . Масса муфты  $m_2$ . К пластине приложена горизонтальная сила  $F$ , к муфте — вертикальная сила  $P$ , к цилиндру — момент  $M$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота цилиндра  $\varphi$ .

**Задача 30.21.***Подгорный Артемий Николаевич*

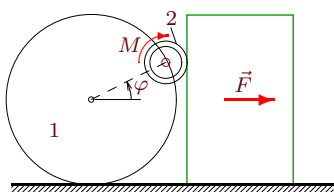
Стержень  $AD$  длиной  $a$ , скользящий в качающейся муфте  $C$ , соединен шарниром  $A$  с кривошипом  $OB$  длиной  $l$ . К стержню  $AD$  приложен момент  $M$ , к точке  $D$  — горизонтальная сила  $F$ ;  $OA = CO = b$ . Масса муфты, закрепленной на шарнире в центре масс, равна  $m_1$ , момент инерции муфты —  $J_1$ . Масса кривошипа  $OB$  равна  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа  $\varphi$ .

**Задача 30.22.***Чужин Темирлан Аскарлович*

Стержень  $AD$  длиной  $a$ , скользящий в качающейся муфте  $C$ , соединен шарниром  $A$  с кривошипом  $OB$  длиной  $l$ . На кривошип  $OB$  действует момент  $M$ , к точке  $D$  приложена горизонтальная сила  $F$ ;  $OA = CO = b$ . Масса стержня  $AD$  равна  $m_1$ , масса кривошипа  $OB$  —  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа  $\varphi$ .

**Задача 30.23.***Щёкин Сергей Дмитриевич*

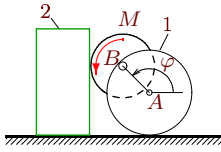
Цилиндр радиусом  $R$ , массой  $m_1$ , катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности. На ободе цилиндра закреплена ось колеса радиусом  $r$ , катящегося по боковой поверхности груза. Масса колеса  $m_2$ , радиус инерции  $i$ . К грузу, скользящему по гладкой поверхности, приложена горизонтальная сила  $F$ , к колесу — момент  $M$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота цилиндра  $\varphi$ .



**Задача 30.24.**

*Лазарев Кирилл Александрович*

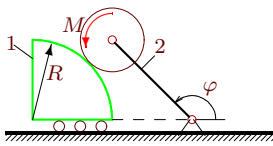
На ободе диска  $A$  радиусом  $R$ , массой  $m_1$ , шарнирно закреплен диск  $B$  радиусом  $r$ . Диск  $A$  катится по горизонтальной поверхности, диск  $B$  — по боковой поверхности груза массой  $m_2$ , скользящего по горизонтальной поверхности. К диску  $B$  приложен момент  $M$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота диска  $A$   $\varphi$ .



**Задача 30.25.**

*Пятибратов Александр*

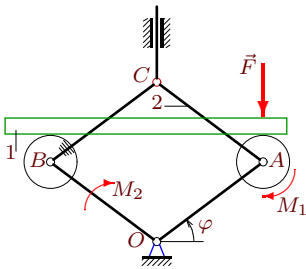
Груз массой  $m_1$  движется на невесомых подшипниках по горизонтальной плоскости. По боковой цилиндрической поверхности груза радиусом  $R = 4r$  катится диск радиусом  $r$ , закрепленный на стержне длиной  $5r$ . К диску приложен момент  $M$ . Масса стержня  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .



**Задача 30.26.**

*Иванов Никита*

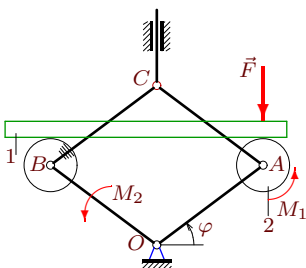
Четыре стержня образуют ромб со стороной  $a$ . Два стержня шарнирно прикреплены к вертикальному штоку, два — к неподвижному шарниру. На осях  $A$  и  $B$  вращаются диски радиусами  $r$ , на дисках лежит брус. Качение дисков по брусу происходит без проскальзывания. Диск на оси  $B$  жестко скреплен со стержнем  $BC$ . Масса бруса равна  $m_1$ , стержня  $AC$  —  $m_2$ . К диску приложен момент  $M_1$ , к стержню  $BO$  —  $M_2$ , к брусу — вертикальная сила  $F$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $OA$   $\varphi$ .



**Задача 30.27.**

*Попов А.В.*

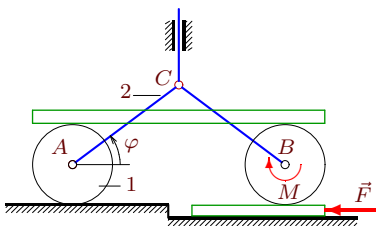
Четыре стержня образуют ромб со стороной  $a$ . Два стержня шарнирно прикреплены к вертикальному штоку, два — к неподвижному шарниру. На осях  $A$  и  $B$  вращаются диски радиусами  $r$ , на дисках лежит брус. Качение дисков по брусу происходит без проскальзывания. Диск на оси  $B$  жестко скреплен со стержнем  $BC$ . Масса бруса равна  $m_1$ , диска на оси  $A$  —  $m_2$ . К диску приложен момент  $M_1$ , к стержню  $BO$  —  $M_2$ , к брусу — вертикальная сила  $F$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $OA$   $\varphi$ .

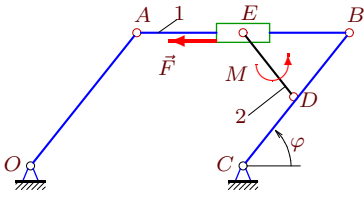


**Задача 30.28.**

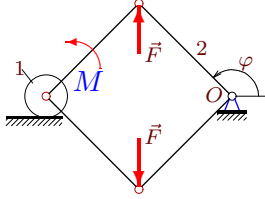
*Солдатов К.А*

Два стержня одинаковой длины  $a$  шарнирно прикреплены к вертикальному штоку. Стержень  $AC$  соединен с осью диска  $A$ , который катится по горизонтальному основанию. Диск  $B$  катится по пластине, скользящей по тому же основанию. На дисках лежит горизонтальный брус. Масса диска  $A$  равна  $m_1$ , стержня  $AC$  —  $m_2$ . К диску  $B$  приложен момент  $M$ , к пластине — горизонтальная сила  $F$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $AC$   $\varphi$ .

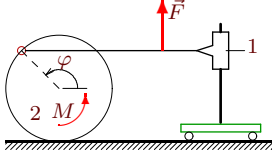


**Задача 30.29.**

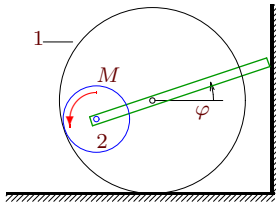
На горизонтальном стержне  $AB$  шарнирного параллелограмма  $OABC$  надета невесомая муфта  $E$ , соединенная стержнем  $DE$  с серединой кривошипа  $BC$ . К стержню  $DE$  приложен момент  $M$ , к муфте  $E$  — горизонтальная сила  $F$ ;  $OA = CB = 2a$ ,  $DE = a$ . Масса стержня  $AB$  равна  $m_1$ , масса стержня  $DE$  —  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа  $\varphi$ .

**Задача 30.30.**

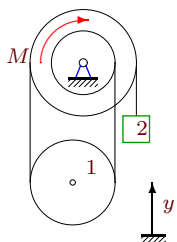
Шарнирный параллелограмм, состоящий из стержней одинаковой длины  $a$ , приводит в движение цилиндр массой  $m_1$ , катящийся без проскальзывания по горизонтальной плоскости. Стержень  $OA$  имеет массу  $m_2$ , остальные стержни считать невесомыми. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

**Задача 30.31.**

К муфте массой  $m_1$ , движущейся по вертикальной стойке, закрепленной на тележке, жестко прикреплена горизонтальная тяга, шарнирно соединенная с ободом диска. Масса диска  $m_2$ , радиус  $R$ . Момент  $M$  приложен к диску, сила  $F$  — к тяге. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

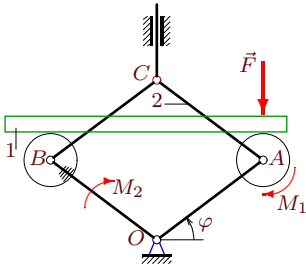
**Задача 30.32.**

На оси обода радиусом  $R$ , массой  $m_1$ , шарнирно закреплен стержень длиной  $L$ , скользящий одним концом по вертикальной плоскости. На другом конце стержня шарнирно закреплен диск радиусом  $r$ , катящийся по внутренней поверхности обода. К диску приложен момент  $M$ . Качение обода по горизонтальной плоскости происходит без проскальзывания. Масса диска  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .

**Задача 30.33.**

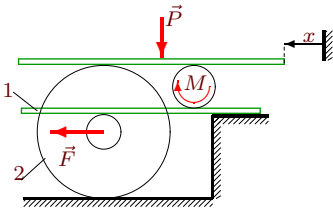
Нить, навитая на внутренний (радиус  $r$ ) и внешний (радиус  $R$ ) ободы невесомого блока, огибает цилиндр с подвижной осью. Масса цилиндра  $m_1$ , радиус  $(R + r)/2$ , нити вертикальные. К свободному концу нити подвешен груз массой  $m_2$ . Момент  $M$  приложен к блоку. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять высоту оси цилиндра  $y$ .

### Задача 30.34.



Четыре стержня образуют ромб со стороной  $a$ . Два стержня шарнирно прикреплены к вертикальному штоку, два — к неподвижному шарниру. На осях  $A$  и  $B$  вращаются диски радиусами  $r$ , на дисках лежит брус. Качение дисков по брусу происходит без проскальзывания. Диск на оси  $B$  жестко скреплен со стержнем  $OB$ . Массу бруса равна  $m_1$ , стержня  $AC$  —  $m_2$ . К диску приложен момент  $M_1$ , к стержню  $BO$  —  $M_2$ , к брусу — вертикальная сила  $F$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $OA$   $\varphi$ .

### Задача 30.35.



Блок из двух цилиндров (радиусы ободов  $r_0$  и  $R_0$ ) катится по горизонтальной поверхности. На обод меньшего радиуса опирается без проскальзывания горизонтальная пластина, скользящая правым концом по неподвижной опоре. Другая горизонтальная пластина опирается без проскальзывания на обод большого радиуса и на вал радиусом  $r_1$ , катящийся по нижней пластине. К оси блока приложена горизонтальная сила  $F$ , к верхней пластине — вертикальная сила  $P$ , к валу — момент  $M$ . Массу нижней пластины равна  $m_1$ , блока —  $m_2$ . Момент инерции блока  $J_0$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять перемещение верхней пластины  $x$ .