2. *В результате решения получается отрицательное ускорение, а в ответе оно положительное. Что это значит?*

В ответе даны абсолютные величины ускорений.

3. *Как выразить скорость оси цилиндра, подвешенного на двух нитях и совершающего плоское движение, через скорости нитей (например, цилиндра A в варианте* 10 *)?*

Если скорости нитей $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ направлены в одну сторону, то скорость оси цилиндра $v = (v_1 + v_2)/2$. Это следует из того, что концы векторов скоростей точек неизменяемого отрезка (диаметра) лежат на одной прямой. Угловую скорость легче всего выразить, определив положение МЦС цилиндра (рис. 87, с. 159). Получаем: $\omega = (v_1 - v_2)/(2R)$, где R — неизвестный радиус цилиндра (в процессе решения он сократится и в ответ не войдет). Если скорость $\vec{v}_2$ направлена в сторону, противоположную $\vec{v}_1$, то результаты получаются те же, но знак у v_2 заменится на противоположный.

4. *В условии не дана масса m, через которую выражены остальные массы. Какое значение m брать при решении?*

Масса m сократится в процессе решения и в ответ не войдет.

13.5. Уравнение Лагранжа. Нелинейные уравнения движения

Постановка задачи. *Механическая система с одной степенью свободы характеризуется нелинейными кинематическими соотношениями. Составить уравнение движения системы.*

План решения

1. Выбираем обобщенную координату. В качестве обобщенной координаты q можно брать угол поворота одного из тел системы или декартову координату какой-либо точки, однозначно описывающую положение системы. Часто обобщенная координата задана в условии задачи.

2. Составляем кинематические графы системы. Выражаем через обобщенную скорость $\dot{q}$ угловые скорости тел и скорости точек приложения активных сил (§ 8.5, с. 188).

3. Вычисляем кинетическую энергию системы (§ 12.2, с. 241).

4. Находим обобщенную силу, вычисляя виртуальные мощности

активных сил:

$$Q = \frac{1}{\dot q}\left(\sum_{i=1}^{N_1} \vec F_i \cdot \vec v_i + \sum_{i=1}^{N_2} \vec M_i \cdot \vec\omega_i\right).$$

5. Находим частные производные $\partial T/\partial \dot q$ и $\partial T/\partial q$ и записываем уравнение Лагранжа 2-го рода *) :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q. \qquad (1)$$

Пример 1. Рассмотрим механическую систему, приведенную в примере § 12.2. Составим для нее уравнение движения (рис. 126, с. 242).

Решение

Вычисление скоростей и кинетической энергии, т.е. выполнение первых трех пунктов плана, подробнее рассмотрены на с. 243.

1. Выбираем обобщенную координату φ — угол поворота цилиндра 1, соединенного со стержнем AB.

2. Составляем кинематические графы системы (рис. 127, с. 243) и получаем выражения для скоростей и угловых скоростей:

$$\begin{array}{ll} \omega_{BCz} = -\dot\varphi, & v_{Cx} = -2a\dot\varphi\sin\varphi, \\ v_{Dx} = -(3/2)a\dot\varphi\sin\varphi, & v_{Dy} = (1/2)a\dot\varphi\cos\varphi. \end{array} \qquad (2)$$

3. Вычисляем кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий цилиндров и стержня (с. 244):

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{\dot\varphi^2}{2}(A + B\sin^2\varphi),$$

где A и B константы: $A = m_1R^2/2 + m_3a^2/3,\ B = 2a^2(3m_2 + m_3)$.

4. Находим обобщенную силу, вычисляя виртуальные мощности активных сил:

$$Q = \frac{1}{\dot\varphi}(\vec G_1 \cdot \vec v_A + \vec G_2 \cdot \vec v_C + \vec G_3 \cdot \vec v_D + \vec M \cdot \vec\omega_A + \vec F \cdot \vec v_C).$$

*) Если кинетическую энергию можно представить в виде $T = 0.5\dot q^2 f(q)$, где $f(q)$ — известная функция обобщенной координаты, то уравнение Лагранжа 2-го рода имеет вид

$$\ddot q f(q) + 0.5\dot q^2 f'(q) = Q,$$

где $f'(q) = df/dq$.

Горизонтальная плоскость, по которой катится цилиндр, и шарнир, на котором закреплен цилиндр 1, являются идеальными связями. Виртуальные мощности этих реакций равны нулю, и в выражение для Q эти силы не входят. Аналогично, не входит в обобщенную силу и сила трения, приложенная при отсутствии проскальзывания к неподвижной точке (точке касания поверхности) цилиндра 2. Учитывая выражения для векторов сил,

$$\vec{G}_i = \{0,\ -m_i g,\ 0\}, i = 1...3,\ \vec{F} = \{F,\ 0,\ 0\},$$

момента $\vec{M} = \{0,\ 0,\ M\}$, выражение $\vec{\omega}_A = \{0,\ 0,\ \dot{\varphi}\}$ и соотношения (2), получаем в результате обобщенную силу:

$$Q = M - 0.5 m_3 a g \cos\varphi - 2aF\sin\varphi.$$

5. Находим частные производные

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}(A + B\sin^2\varphi), \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} B \sin 2\varphi,$$

и полную производную по времени

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \ddot{\varphi}(A + B\sin^2\varphi) + \dot{\varphi}^2 B\sin 2\varphi.$$

Записываем уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\ddot{\varphi}(A + B\sin^2\varphi) + 0.5\dot{\varphi}^2 B\sin 2\varphi = M - 0.5 m_3 a g\cos\varphi - 2aF\sin\varphi.$$

Пример 2. Механическая система с одной степенью свободы обладает нелинейными кинематическими соотношениями (рис. 161). Кривошипно-кулисный механизм состоит из маховика 1, кулисы 2, двигателя со шкивом 3, катка 4 и штока 5. К шкиву 3 приложен момент двигателя $M_{Дz} = M_0 - k\omega_{3z}$. Каток своим внешним ободом катится без проскальзывания и без трения качения по горизонтальной поверхности. Внутренним ободом каток также без проскальзывания приводит в движение шток, к которому приложена полезная нагрузка, моделируемая силой $F_{Hx} = -\mu v_{5x}$. Трением пальца A в прорези кулисы 2 пренебрегаем. Шкив 3 считаем однородным цилиндром, момент инерции маховика 1 вместе с пальцем A, закрепленным на нем, равен $J_1 = 2.5$ кг м^2. Даны массы: $m_A = 1$ кг, $m_2 = 15$ кг, $m_3 = 10$ кг, $m_4 = 16$ кг, массу штока 5 считать равной нулю. Даны радиусы: $R_1 = 0.4$ м, $O_1A = r_1 = 0.1$ м, $R_3 = 0.3$ м,

$r_4 = 0.2$ м, $R_4 = 0.41$ м; радиус инерции $i_4 = 0.32$ м. Пусковой момент $M_0 = -30$ Нм; крутизна статической характеристики двигателя $k = 0.2$ Нмс; коэффициент сопротивления $\mu = 950$ Н с/м. Составить уравнение движения системы [*].

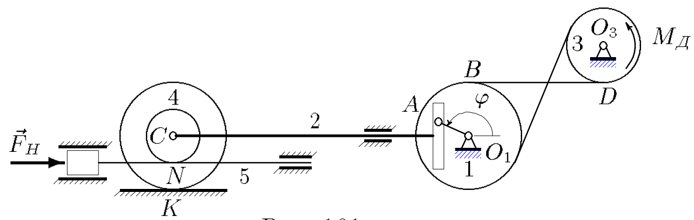

Рис. 161

Решение

1. Выбираем обобщенную координату φ — угол поворота шкива 1, отсчитываемый от горизонтальной оси x (направленной, как всегда, направо) против часовой стрелки.

2. Составляем кинематические графы системы:

$$O_1 \xrightarrow[\varphi]{r_1} A\,; \quad O_1 \xrightarrow[\pi/2]{R_1} B\,; \quad D \xrightarrow[\pi/2]{R_3} O_3\,; \quad K \xrightarrow[\pi/2]{R_4} C\,; \quad K \xrightarrow[\pi/2]{R_4 - r_4} N\,.$$

Точка K является точкой касания внешнего обода блока 4 неподвижной поверхности, проскальзывание отсутствует, поэтому $\vec{v}_K = 0$. Шток 5 касается внутреннего обода блока 4 в точке N, скорость штока $v_{5x} = v_{Nx}$. Получаем выражения для проекций скоростей:

$$\begin{aligned} &v_{Ax} = -r_1\dot{\varphi}\sin\varphi, && v_{Ay} = r_1\dot{\varphi}\cos\varphi, \\ &v_{Bx} = -R_1\dot{\varphi}, && v_{Dx} = R_3\omega_{3z}, \\ &v_{Cx} = -R_4\omega_{4z}, && v_{Nx} = v_{5x} = -(R_4 - r_4)\omega_{4z}. \end{aligned} \tag{3}$$

Нить BD нерастяжимая, отсюда следует кинематическая связь: $v_{Dx} = v_{Bx}$. Вместе с (3) это дает $\omega_{3z} = -(R_1/R_3)\dot{\varphi}$, т.е. тела 3 и 1 вращаются в разные стороны. Так как шток 2 кулисы является жестким, то $v_{Ax} = v_{Cx}$. Отсюда находим угловую скорость блока 4 $\omega_{4z} = (r_1/R_4)\dot{\varphi}\sin\varphi$ и скорость штока $v_{5x} = -(R_4 - r_4)r_1/R_4\dot{\varphi}\sin\varphi$.

3. Вычисляем кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий четырех тел. Маховик 1 с моментом инерции J_1 и

[*] За основу задачи взято задание Д-5 из сборника [15].

шкив 3 с моментом инерции $m_3 R_3^2/2$ вращаются, каток 4 совершает плоское движение, а кулиса 2 — поступательное:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = \frac{J_1 \dot\varphi^2}{2} + \frac{m_2 (r_1 \dot\varphi \sin\varphi)^2}{2} + \frac{m_3 R_3^2}{2} \frac{(\dot\varphi R_1/R_3)^2}{2} + \\ + \frac{m_4 (r_1 \dot\varphi \sin\varphi)^2}{2} + \frac{m_4 i_4^2 (r_1/R_4 \dot\varphi \sin\varphi)^2}{2}.$$

Для удобства вычислений представим кинетическую энергию в виде

$$T = \frac{\dot\varphi^2}{2}(A + B\sin^2\varphi), \tag{4}$$

где $A = J_1 + m_3 R_1^2/2$, $B = m_2 r_1^2 + m_4 (i_4 r_1/R_4)^2 + m_4 r_1^2$.

4. Вычисляем обобщенную силу:

$$Q = \frac{1}{\dot\varphi}(\vec G_A \cdot \vec v_A + \vec F_H \cdot \vec v_5 + \vec M_Д \cdot \vec\omega_3).$$

Учитывая выражения для векторов

$$\begin{aligned} &\vec G_A = \{0,\ -m_A g,\ 0\}, && \vec v_A = \{-r_1 \dot\varphi \sin\varphi,\ r_1 \dot\varphi \cos\varphi,\ 0\}, \\ &\vec F_H = \{-\mu v_{5x},\ 0,\ 0\}, && \vec v_5 = \{-(R_4 - r_4) r_1/R_4 \dot\varphi \sin\varphi,\ 0,\ 0\}, \\ &\vec M_Д = \{0,\ 0,\ M_0 - k\omega_{3z}\}, && \vec\omega_3 = \{0,\ 0,\ -(R_1/R_3)\dot\varphi\}, \end{aligned}$$

получаем в результате обобщенную силу, которую представляем в виде суммы $Q = Q_H + Q_T + Q_Д$, где $Q_H = -\mu(r_1(R_4 - r_4)/R_4 \sin\varphi)^2 \dot\varphi$, $Q_T = -m_A g r_1 \cos\varphi$, $Q_Д = -(M_0 + k\dot\varphi R_1/R_3) R_1/R_3$.

5. Находим частные производные

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.5\dot\varphi^2 B \sin 2\varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = \dot\varphi (A + B\sin^2\varphi),$$

и полную производную по времени

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\right) = \ddot\varphi (A + B\sin^2\varphi) + \dot\varphi^2 B \sin 2\varphi.$$

Записываем уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\ddot\varphi (A + B\sin^2\varphi) + 0.5\dot\varphi^2 B \sin 2\varphi = Q_T + Q_H + Q_Д. \tag{5}$$

Полученное нелинейное дифференциальное уравнение движения системы может быть проинтегрировано численно (§ 17.2).