Стабильность линейного дифференциального уравнения первого порядка

М.Н. Кирсанов

E-mail: mpei2004@yandex.ru

Москва, МЭИ(ТУ)

Аннотация

Изучается случаи вырождения связи низших и высших производных, определенной дифференциальным уравнением. Найдены случаи сгущения кривых нестабильности.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L = u'_{,x} + u'_{,y} + uf(x, y) = 0 \tag{1}$$

для функции $u = u(x, y)$, дифференцируемой в некоторой области Ω достаточное число раз. Найдем связь между функцией u, ее первыми частными производными $u'_{,x}$, $u'_{,y}$ и производными второго порядка. Предполагая, что функция $f(x, y)$ также дифференцируема достаточное число раз, запишем (1), продифференцированное по x и y:

$$\begin{aligned} L'_{,x} &= u''_{,xx} + u''_{,yx} + u'_{,x}\, f + u\, f_{,x}{}' = 0, \\ L'_{,y} &= u''_{,xy} + u''_{,yy} + u'_{,y}\, f + u\, f_{,y}{}' = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Систему (1–2) представим в матричной форме, отнеся в правую часть высшие производные

$$\mathbf{A}\vec{U} = \vec{B}, \tag{3}$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} f & 1 & 1 \\ f'_{,x} & f & 0 \\ f'_{,y} & 0 & f \end{bmatrix}, \ \vec{U} = \begin{bmatrix} u \\ u'_{,x} \\ u'_{,y} \end{bmatrix}, \ \vec{B} = -\begin{bmatrix} 0 \\ u''_{,xx} + u''_{,yx} \\ u''_{,xy} + u''_{,yy} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

При $\det \mathbf{A} \to 0$ связь функции и ее производных $\vec{U}$ и вторых частных производных $\vec{B}$ вырождается. Это вырождение можно также трактовать как неограниченное возрастание функции и ее производных там, где $\det \mathbf{A} \to 0$. При этом, величина вторых производных (если они отличны от нуля) несущественна. Имеем $\det \mathbf{A} = \Phi_2(x, y) = f(f^2 - f'_{,x} - f'_{,y})$. Там, где $\Phi_2(x, y) = 0$, связь производных вырождается. Кривые $\Phi_2(x, y) = 0$ в области Ω будем называть кривыми нестабильности второго порядка [1]. Продолжим процесс дифференцирования L. Для получения кривых нестабильности порядка 3, запишем систему, содержащую частные производные третьего порядка

$$L = 0,\ L'_{,x} = 0,\ L'_{,y} = 0,\ L'_{,xx} = 0,\ L'_{,xy} = 0,\ L'_{,yy} = 0,$$

которую также представим в матричном виде (3), где $\vec{U}^T = \{u, u'_{,x}, u'_{,y}, u''_{,xx}, u''_{,yx}, u''_{,yy}\}$, а вектор правых частей содержит производные третьего порядка. Определитель системы имеет вид

$$\det \mathbf{A} = \Phi_3(x, y) = f(f^2 - f'_{,x} - f'_{,y})\,(f^3 - 3\,f'_{,y}\,f + f''_{,yy} + 2\,f''_{,xy} - 3\,f'_{,x}\,f + f''_{,xx})$$

В общем случае, для кривых нестабильности порядка n имеем

$$\det \mathbf{A} = \prod_{k=1}^{n} \Phi_k, \tag{5}$$

где

$$\Phi_1 = f, \quad \Phi_{k+1} = \Phi_k f - \Phi'_{k,x} - \Phi'_{k,y}.$$

Отсюда следует, что все кривые нестабильности порядка n_1 являются кривыми нестабильности для всех порядков $n_2 > n_1$. С повышением порядка нестабильности растет число сомножителей в (5).

В частности, для $f = x^2 + y^2$, кривые нестабильности до пятого порядка включительно изображены на Рис. 1, а для $f = xy$ — на Рис. 2.

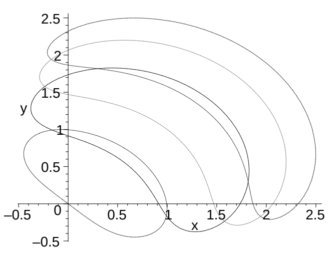

Fig.1. *Кривые нестабильности для* $f = x^2 + y^2$, $n = 5$.

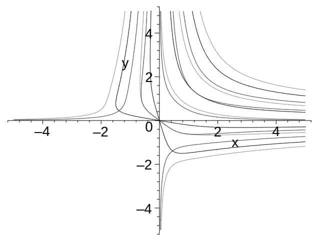

Fig.2. *Кривые нестабильности для* $f = xy$, $n = 5$.

Аналогично, для дифференциального уравнения

$$L = u'_{,x} x + u'_{,y} y + u f(x, y) = 0 \tag{6}$$

получим условие нестабильности второго порядка ($n = 2$):

$$\det \mathbf{A} = (1+f)((1+f)f - f'_x - f'_y)$$

и $n = 3$:

$$\det \mathbf{A} = (2+f)((2+f)(1+f) - f'_{,x} - f'_{,y})((2+f)(1+f)f - \\ -(3f+2)(f'_{,x} + f'_{,y}) + f''_{,xx}x^2 + 2f''_{,xy}xy + f''_{,yy}y^2).$$

Очевидно для определителя имеем тоже представление (5), но с функциями вида

$$\Phi_1 = f + n - 1, \quad \Phi_{k+1} = \Phi_k(n-k-1+f) - \Phi'_{k,x}x - \Phi'_{k,y}y.$$

Так как Φ_1 зависит от n, и связь Φ_{k+1} и Φ_k также зависит от порядка n, то в отличие от условия нестабильности (1) множество кривые высших порядков в общем случае не включает в себя кривые нестабильности низших порядков. Однако для случая $f = x/y$ можно получить общее представление для определителя нестабильности порядка n:

$$\det \mathbf{A} = y^{-n(n+1)/2} \prod_{k=1}^{n} (x+ky)^{k+1} \tag{7}$$

откуда видно, что с увеличением n добавляются новые сомножители в произведении, дающие новые прямые $x + ky = 0$. При $n \to \infty$ получим предельную прямую $y = 0$.

Хотя сама прямая $y = 0$ не принадлежит множеству точек нестабильности, так как y содержится в знаменателе (7), можно заключить, что найдено *сгущение* критических кривых (в данном случае — прямых), проблема существования которого (в форме псевдобифуркационных точек) обсуждалась в [2] в связи с отысканием критерия устойчивости реологических конструкций и материалов при ползучести.

Процедура выявления кривых нестабильности может быть применена и для нелинейных процессов и явлений. В этом случае уравнение линеаризуется и в качестве переменных выступают приращения функций. В простейшем случае явление описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка (устойчивость при ползучести). Вместо кривых нестабильности разыскиваются критические точки, соответствующие критическим временам. Эти точки имеют подтвержденный экспериментом смысл — в те моменты, когда определитель системы обращается в нуль, малые возмущения высших производных приводят к бесконечным скачкам функции (в частности, прогиба) и ее низших скоростей, что можно трактовать как потеря устойчивости. Точка нестабильности порядка 1 соответствует критерию Ю.Работнова – С.Шестерикова [3].

Очевидно, что кривые нестабильности можно также трактовать как геометрическое место точек с нулевыми кривизнами.

Список литературы

[1] М.Н. Кирсанов, *Определение и анализ стабильности движения с использованием системы Maple*, Exponenta Pro. Математика в приложениях №3-4. (2004).

[2] В.Д. Клюшников, *Лекции по устойчивости деформируемых систем*, М.:Изд-во МГУ. (1986).

[3] Работнов Ю.Н. , *Ползучесть элементов конструкций*, М.:Наука. (1966).