ИНДУКТИВНЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

Кирсанов М. Н., Кленова И. Г.

Московский Энергетический Институт (Технический Университет)

Исследование систем с большим числом элементов на прочность, устойчивость или колебания обычно ограничено каким-то разумным пределом в размере системы. Обычно применяют численный или аналитический метод. Численный анализ (в том числе и метод конечных элементов) для систем большой размерностью неизбежно имеет тенденцию к накоплению ошибок округления или к потере точности при решении алгебраических систем. Аналитические методы доступны для сравнительно несложных систем. В тех же случаях, когда исследуемая система имеет периодическую структуру геометрии, упругих и прочностных свойств возможен третий путь – индуктивный вывод разрешающих формул. Этот метод также формально является аналитическим, но для его работы приходится использовать программы аналитических вычислений.

Рассмотрим для примера колебания узла статически определимой фермы с произвольным четным числом панелей. Средний узел нижнего пояса наделен массой. Ферма одной панелью в половине пролета имеет вид (рис.1).

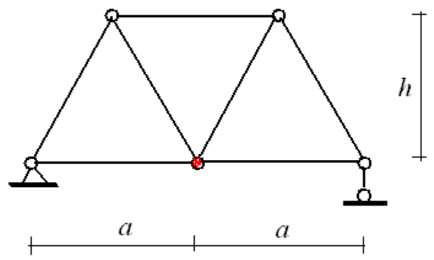

Рис.1. Ферма с треугольной решеткой (n=1)

Определяем усилия $S_{1,i}$ в стержнях i от действия единичной горизонтальной силы, приложенной к массе, и усилия $S_{2,i}$ от действия единичной вертикальной силы. В ферме с двумя панелями i=1..7. По формуле Максвелла-Мора $b_{i,j} = b_{j,i} = \sum_{\mu=1}^{k} S_{i,\mu} S_{j,\mu} l_\mu / EF$, $i = j = 1, 2$ определяем коэффициенты податливости $b_{i,j}$. Здесь l_μ – длины стержней, EF – жесткость, одинаковая для всех стержней. Получаем $b_{11} = a$, $b_{12} = -a^2/(2H)$, $b_{22} = \dfrac{(a^2+H^2)^{3/2}}{2H^2} + \dfrac{3a^3}{2H^2}$, $H=2h$. Вычисляем собственные значения λ_1, λ_2 матрицы

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Находим частоты собственных колебаний (круговые частоты [1]): $\omega_1 = 1/\sqrt{m\lambda_1}$, $\omega_2 = 1/\sqrt{m\lambda_2}$. Расчет произведен для фермы с одной панелью. Рассчитаем ферму с произвольным числом панелей (рис.2). По-прежнему, массу помещаем в центральный узел.

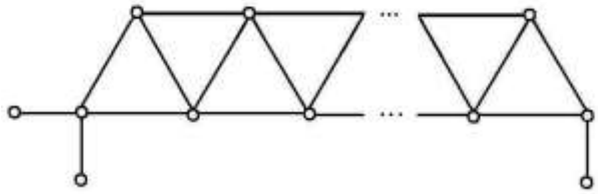

Рис.2. Ферма произвольным числом панелей.

Пусть $2n$ – общее число панелей. При n =1 результат получен. Аналогично получаем при n = 2: $b_{11} = 2a$, $b_{12} = -2a^2 / H$, $b_{22} = \dfrac{(a^2+H^2)^{3/2}}{H^2} + \dfrac{11a^3}{H^2}$. При n = 3: $b_{11} = 3a$, $b_{12} = -9a^2/(2H)$, $b_{22} = \dfrac{3(a^2+H^2)^{3/2}}{2H^2} + \dfrac{73a^3}{2H^2}$. Обобщая на произвольное число панелей, получаем $b_{11} = na$, $b_{12} = -n^2a^2/(2H)$, $b_{22} = \dfrac{n(a^2+H^2)^{3/2}}{2H^2} + \dfrac{n(8n^2+1)a}{6H^2}$. В процессе счета образуются последовательности натуральных чисел, для которых необходимо получить формулу общего члена. Для этого пользуемся возможностями системы Maple 11 [2]. Коэффициенты в последнем слагаемом в b_{22} образуют последовательность 3, 22, 73, 172, 335, 578, 917, 1368. С помощью функции `rgf_findrecur` из пакета `genfunc` (требуется четное число членов последовательности) получаем рекуррентное уравнение $t_n = 4t_{n-1} - 6t_{n-2} + 4t_{n-3} - t_{n-4}$. С помощью другой функции **rsolve** находим простое решение $t_n = n(8n^2+1)/3$. Пусть общая длина фермы равна L. В этом случае a=$L/(2n)$. Интересно отметить, что частоты колебаний имеют экстремальные значения при некотором числе панелей. При h =1м, L =7м, m = 1кг, EF=1кН низшая частота максимальна при n =4 (рис.3). С ростом числа панелей низшая частота стремится к нулю, высшая — к некоторому значению, зависящему от h и L.

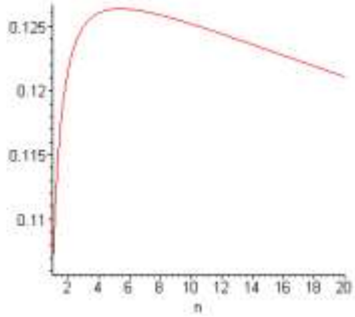

Рис. 3

Предложенный метод может быть использован для исследования сетчатых и гофрированных материалов (рис.4), используемых в нанотехнологиях.

Рис. 4

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 09-01-00756-а, 09-08-01184-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний. – СПб.: Лань, 2003.
2. Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. — М.: Солон, 2006.