Определить:

1) Проекцию на ось Ay равнодействующей $\overline{R}_1^*$ сил инерции стержня OD. В расчётах принять: $m_1 = 1$ кг, $\alpha = \pi/3$ рад, $OD = 0{,}6$ м, $\omega = 10$ рад/с.

Система в рассматриваемый момент времени расположена в плоскости yAz.

2) Координату $z_к$ — точки «к» стержня OD, в которой прикладывается равнодействующая $\overline{R}_1^*$ сил инерции стержня OD. В расчётах принять: $OD = 0{,}6$ м, $OA = 0{,}8$ м, $\alpha = \pi/3$ рад.

3) Определить проекцию на ось Ay силы инерции груза M. В расчётах принять: $m_2 = 0{,}5$ кг, $OB = 0{,}4$ м.

4) Определить деформацию пружины λ. В расчётах принять: $c = 500$ Н/м, $OD = OE = 0{,}6$ м, $z_к = 0{,}6$ м, $\alpha = \pi/3$ рад.

5) Определить динамическую составляющую реакции подшипника В. В расчётах принять: $R_1^* = 26$ Н, $OD = 0{,}6$ м, $\omega = 10$ рад/с, $\alpha = \pi/3$ рад.

Контролирующая программа «Динамические реакции подшипников» была апробирована на машинах типа К 54 ТМ и дала положительные результаты при проведении рубежного контроля и приёме КРГР по изучаемой теме. При этом, независимо от успеха в решении задачи, со студентом проводилась краткая беседа. Зачёт проставлялся по усмотрению преподавателя.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Занозин П.В., Пилюгина Н.Н., Феоктистова О.П.* Динамические реакции подшипников. Методические указания по выполнению курсовой работы по разделу курса теоретической механики. — М.: МВТУ, 1981. — 42 с.

2. *Занозин П.В., Ефремова Л.Е., Плешаков Ю.Д.* Динамические реакции подшипников. Методические указания по выполнению курсовой работы по разделу курса теоретической механики. — М.: МВТУ, 1986. — 46 с.

3. *Гозман Е.Б., Космодемьянский В.А.* О разработке типовых комплектов учебно-демонстрационных пособий по курсу теоретической механики. Сборник научно-методических статей по теоретической механике. — М., 1984. — Вып. 15. — С. 39—44.

УДК 531.011:536.7

Н. В. ОСАДЧЕНКО
Московский энергетический институт

Лагранжев формализм в динамике термомеханических систем

В комплексе мер по перестройке учебного процесса в высшей школе важную роль играет профилизация фундаментальных дисциплин, учитывающая специфику подготовки инженеров различных специальностей. Применительно к курсам теоретической механики, читаемым на теплоэнергетических и энергомашиностроительных факультетах, речь идёт о включении задач, связанных с динамикой термомеханических систем. Решение таких задач дало бы студентам возможность лучше понять значение теоретической механики для их специальности, убедиться в силе и общности её методов.

На кафедре теоретической механики МЭИ подготовлено методическое обеспечение, позволяющее вести занятия по динамике термомеханических систем. Разработан типовой расчёт «Динамика машины с тепловым двигателем», сходный по постановке с расчётами, описанными в [1].

Покажем, используя термомеханическую аналогию, что механические и термические явления могут рассматриваться в рамках единого математического аппарата. Ограничимся конечномерным случаем, когда протекающие процессы характеризуются конечным числом механических и термических параметров.

1. В практике моделирования принято рассматривать как аналогичные понятия скорость и температуру [2]. Приняв эту аналогию за отправной пункт, установим соответствие между другими понятиями механики и термодинамики.

Рассмотрим материальную точку M, совершающую одномерное движение вдоль оси x. В данном случае скорость $v = \dot{x}$ — скаляр; это относится и к импульсу p точки M, и к действующим на эту точку механическим силам F_s $(s = 1,\ 2,\ \ldots)$. Изменение импульса во времени подчиняется основному закону динамики: $\dot{p} = F = \sum\limits_s F_s$.

Связь между кинематическими и динамическими свойствами точки M устанавливается, если задать её кинетическую энергию T как функцию $T = T(p)$; тогда $v = \partial T / \partial p$. Производная от T по времени равна $\dot{T} = v\dot{p} = N$, где $N = Fv$ — мощность силы F.

Рассмотрим теперь систему S, состояние которой однозначно характеризуется единственной переменной — абсолютной температурой θ. Температура θ — аналог скорости v (у координаты x нет термического аналога).

Аналогом кинетической энергии является внутренняя энергия U [3]. Если в качестве её аргумента взять энтропию η, то $\theta =$ $= \partial U / \partial \eta$; итак, энтропия — термический аналог импульса. Производная внутренней энергии системы S по времени равна [3] скорости нагрева Q: $\dot{U} = Q$.

Чтобы сформулировать соотношение, аналогичное 2-му закону Ньютона, нужен термический аналог механической силы. В 1931 г. Л. Онсагер по образцу механики ввёл в неравновесную термодинамику понятия «сил» и «скоростей» для процессов различной физической природы; например, в случае электропроводности роль «скорости» играет ток, а «силы» — ЭДС [4]. Такой подход стал общепринятым при термодинамическом описании самых разнообразных явлений… кроме тепловых.

Представляется, что введение понятия «термической силы» прояснило бы как взаимосвязь между механикой и термодинамикой, так и логическую структуру последней. Поскольку скорость нагрева Q есть термический аналог мощности $N = Fv$, то за термическую силу следует принять отношение $\Phi = Q/\theta$. Тогда закон изменения энтропии можно записать в виде $\dot{\eta} = \Phi$, где $\Phi = \sum_{\sigma} \Phi_\sigma$ — алгебраическая сумма действующих на систему S термических сил. Отдельные (парциальные) термические силы Φ_σ отвечают различным механизмам подвода тепла к системе.

Приведём таблицу аналогий между механическими и термическими величинами.

Механическая система	Термодинамическая система
Импульс p	Энтропия η
Кинетическая энергия $T = T(p)$	Внутренняя энергия $U = U(\eta)$
Скорость $v = \dfrac{\partial T}{\partial p}$	Температура $\theta = \dfrac{\partial U}{\partial \eta}$
Механические силы F_s	Термические силы Φ_σ
Закон изменения импульса: $\dot{p} = F \equiv \sum_{s} F_s$	Закон изменения энтропии: $\dot{\eta} = \Phi \equiv \sum_{\sigma} \Phi_\sigma$
Мощность $N = Fv$	Скорость нагрева $Q = \Phi\theta$

Заметим, что в рамках классической механики точки функция $T = T(p)$ имеет стандартный вид $T(p) = p^2/2m$, где m — масса точки. В термодинамике зависимость U от η, задаваемая так называемым калорическим уравнением состояния [3] $U = U(\eta)$, не является квадратичной и неодинакова для различных систем. Поэтому если выразить из соотношений $v = \partial T/\partial p$ и $\theta = \partial U/\partial\eta$ p и η как функции v и θ и подставить результат в определяющие соотношения для T и U (получив функции $T = \widetilde{T}(v)$ и $U = \widetilde{U}(\theta)$), то $p = \partial\widetilde{T}/\partial v$, в то время как функция $C(p) \equiv \partial\widetilde{U}/\partial\theta$ (теплоёмкость системы S) не совпадает с η.

2. Пусть теперь M — система материальных точек $\{M_k\}$ с импульсами p_k и скоростями v^k ($k = 1, 2, \ldots, n$), а S — термиче-

ская система из m подсистем S_k рассмотренного выше типа с энтропиями η_k и температурами θ^k.

Результирующую силу F_k, действующую на точку M_k, будем рассматривать как сумму $F_k^E + \sum\limits_l F_{kl}$, где F_k^E — внешняя сила (сила воздействия на точку M_k со стороны тел, не входящих в систему M), F_{kl} — сила воздействия точки M_l на точку M_k (при $k = l$ речь идёт о силе самовоздействия [3]). Аналогично, $\Phi_k = \Phi_k^E + \sum\limits_l \Phi_{kl}$.

Условия, которые налагаются на возможный вид сил взаимодействия, в термодинамике имеют менее жёсткий вид, чем в механике. Именно, в механике силы взаимодействия подчинены условию

$$F_{kl} + F_{lk} = 0 \tag{1}$$

(при $k \neq l$ это условие — частный случай 3-го закона Ньютона, а при $k = l$ оно сводится к утверждению о том, что все механические силы самовоздействия равны нулю); в термодинамике — лишь условию

$$\Phi_{kl} + \Phi_{lk} \geqslant 0\,. \tag{2}$$

Например, пусть между подсистемами S_k и S_l происходит теплообмен по закону Ньютона — Рихмана [4]:

$$Q_{kl} = -K(\theta^k - \theta^l), \qquad \Phi_{kl} = -\frac{K(\theta^k - \theta^l)}{\theta^k}\,, \tag{3}$$

где $K \geqslant 0$ — коэффициент теплообмена (в приложениях обычно используется коэффициент теплопередачи $k = K/A$, A — площадь поверхности теплообмена). Тогда $\Phi_{kl} + \Phi_{lk} = K(\theta^k - \theta^l)^2/\theta^k\theta^l$ и неравенство (2) заведомо выполняется. При $K > 0$ и $\theta^k \neq \theta^l$ знак неравенства в (2) является строгим.

При $k = l$ условие (2) сводится к утверждению, что все термические силы самовоздействия неотрицательны.

Если для каждой из точек M_k записать закон изменения импульса и сложить полученные равенства, то в силу (1) получаем теорему об изменении импульса системы материальных точек:

$$\dot{p} = \sum_k F_k^E, \tag{4}$$

($p = \sum\limits_k p_k$ — импульс системы M). Аналогичная операция в термодинамике приводит к неравенству Клаузиуса

$$\dot{\eta} \geqslant \sum_k \Phi_k^E\,. \tag{5}$$

Следовательно, энтропия, в отличие от импульса, может необратимо возрастать за счёт внутренних процессов.

Континуальный аналог неравенства (5) — неравенство Клаузиуса — Дюгема — был положен Б. Коулменом и У. Ноллом в основу современной неравновесной термодинамики сплошных сред и считается одной из форм записи второго закона термодинамики [3, 5].

3. Рассмотрим теперь случай, когда механические и термические процессы протекают совместно в одной термомеханической системе S.

Предполагается, что система включает в себя материальные точки, абсолютно твёрдые тела и, возможно, деформируемые тела, испытывающие однородные деформации. Пусть механическое состояние системы S характеризуется набором обобщённых координат $q^1, \ldots, q^n$, а её динамические свойства описываются: 1) кинетической энергией вида

$$T = \widetilde{T}(\dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n, q^1, \ldots, q^n) = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j , \tag{6}$$

где a_{ij} — коэффициенты инерции (будем считать их известными функциями обобщённых координат); 2) обобщёнными механическими силами Q_i; последние могут зависеть от обобщённых координат и скоростей, а также температур.

В соотношении (6) (и далее) использовано правило тензорного исчисления о подразумеваемом суммировании по каждому индексу, который повторяется дважды: вверху и внизу.

Термические свойства системы S охарактеризуем, представив её как объединение m простых подсистем S_k с температурами θ^k. Примем, что энтропии η_k и внутренние энергии U_k этих подсистем удовлетворяют калорическим уравнениям состояния

$$U_k = U_k(\eta_k, q^1, \ldots, q^n), \tag{7}$$

причём по-прежнему

$$\theta^k = \partial U_k / \partial \eta_k . \tag{8}$$

Соотношения (7) и (8) позволяют представить энтропии как функции

$$\eta_k = \widetilde{\eta}_k(\theta^k, q^1, \ldots, q^n) . \tag{9}$$

Изменение обобщённых координат во времени определяется уравнениями Лагранжа 2-го рода

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i ; \tag{10}$$

изменение температур — уравнениями

$$\dot{\eta}_k = \Phi_k, \tag{11}$$

где Φ_k — результирующая термическая сила, действующая на подсистему S_k и зависящая от тех же переменных, что и механические силы Q_i. Вновь предполагается, что $\Phi_k = \Phi_k^E + \sum\limits_l \Phi_{kl}$, причём для любых k, l постулируется выполнение условия (2).

Уравнения (10), (11) образуют полную систему уравнений движения термомеханической системы S. При этом T и η_k с учётом (6) и (9) рассматриваются как известные функции своих аргументов.

Более прямой путь составления уравнений движения получается, если распространить лагранжев формализм на термические переменные.

Определим термическую функцию Лагранжа как функцию от $\theta^1, \ldots, \theta^m, q^1, \ldots, q^n$, связанную с внутренней энергией $U = \sum\limits_k U_k$ системы S преобразованием Лежандра:

$$L_T = \eta_k \theta^k - U(\eta_1, \ldots, \eta_m, q^1, \ldots, q^n); \tag{12}$$

предполагается, что в (12) энтропии η_k заменены их выражениями вида (9).

Обычно вместо функции L_T используют свободную энергию Ψ, отличающуюся от L_T знаком: $\Psi = -L_T$. Задание термических свойств системы калорическим уравнением состояния вида

$$\Psi = \Psi(\theta^1, \ldots, \theta^m, q^1, \ldots, q^n)$$

столь же распространено, как и задание их при помощи внутренней энергии.

Нетрудно проверить, что

$$\frac{\partial L_T}{\partial \theta^k} = \eta_k, \qquad \frac{\partial L_T}{\partial q^i} = -\frac{\partial U}{\partial q^i}.$$

Продифференцируем (7) по времени с учётом (11). Получим

$$\dot{U}_k = \frac{\partial U_k}{\partial \theta^k} \cdot \dot{\eta}_k + \frac{\partial U_k}{\partial q^i}\dot{q}^i = \Phi_k \cdot \theta^k + \frac{\partial U_k}{\partial q^i}\dot{q}^i,$$

что можно переписать в виде

$$\Phi_k \cdot \theta^k = \dot{U}_k + Q_{ik}^{\Pi}\dot{q}^i. \tag{13}$$

Соотношение (13) можно интерпретировать так: теплота, подведённая к системе S_k, расходуется на изменение внутренней энергии этой системы и на совершение работы термоупругими силами $Q^{\Pi}_{ik} = -\partial U_k/\partial q^i$. Таким образом, термоупругие силы — это внутренние механические силы, обусловленные переходом внутренней энергии в механическую. Положим

$$Q^{\Pi}_i \;=\; \sum_k Q^{\Pi}_{ik} \;=\; -\sum_k \frac{\partial U_k}{\partial q^i} \;=\; -\,\frac{\partial U}{\partial q^i}$$

и выделим среди обобщённых сил следующие слагаемые: $Q_i = Q^C_i + Q^{\Pi}_i + Q'_i$. Здесь $Q^C_i = -\partial V/\partial q^i$ — консервативные, Q'_i — неконсервативные силы; $V = V(q^1,\ \ldots,\ q^n)$ — потенциальная энергия.

Определим теперь термомеханическую функцию Лагранжа как сумму механической и термической функций Лагранжа:

$$L \;=\; L(\dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n, \theta^1, \ldots, \theta^m, q^1, \ldots, q^n) \;=\; L_M + L_T,$$

где $L_M = T - V$. Поскольку

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \;=\; \frac{\partial L_M}{\partial \dot{q}^i} \;=\; \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta^k} \;=\; \frac{\partial L_T}{\partial \theta^k} \;=\; \eta_k,$$

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} \;=\; \frac{\partial L_M}{\partial q^i} + \frac{\partial L_T}{\partial q^i} \;=\; \frac{\partial T}{\partial q^i} - \frac{\partial V}{\partial q^i} - \frac{\partial U}{\partial q^i} \;=\; \frac{\partial T}{\partial q^i} + Q^C_i + Q^{\Pi}_i,$$

то уравнения движения (10), (11) можно представить в форме

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} \;=\; Q'_i, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial L}{\partial \theta^k} \;=\; \Phi_k. \tag{14}$$

Отсутствие полной симметрии между механической и термической частью уравнений Лагранжа (14) объясняется тем, что температура (в отличие от скорости) не является производной по времени от какой-либо величины, имеющей физический смысл.

Изложенный формализм аналитической динамики термомеханических систем, базирующийся на понятии термической силы, можно рассматривать как естественное развитие того подхода, который традиционно используется в курсе теоретической механики. По отношению к общей неравновесной термодинамике конечномерная теория выступает как простой частный случай, удобный для первоначального ознакомления с фундаментальными закономерностями, присущими термомеханическим процессам; вместе с тем она может служить базисом для конечно-элементных аппроксимаций континуальных задач.

4. Рассмотрим пример. Пусть система S состоит из газа в неподвижной цилиндрической камере и поршня массой M, движущегося в камере под действием сжимающей силы $F = F(t)$.

При движении поршня возникает сила вязкого трения с коэффициентом трения μ. Газ по закону Ньютона — Рихмана (3) обменивается теплом через дно камеры с внешней средой, имеющей температуру θ^*; боковые стенки камеры и поверхность поршня считаются адиабатическими.

Составим уравнения движения системы, выбрав за обобщённую координату расстояние x от поршня до дна камеры и считая газ совершенным [6], а его теплоёмкость $C(\theta) = C$ — постоянной.

Полагая деформацию однородной, заметим, что скорость u в каждой точке объёма, занятого газом, пропорциональна расстоянию l этой точки от дна камеры: $u = l\dot{x}/x$. Интегрируя выражение $\rho u^2/2$, где ρ — плотность газа, по объёму камеры, получаем, что кинетическая энергия газа равна $m\dot{x}^2/6$ (m — масса газа). Кинетическая энергия поршня равна $M\dot{x}^2/2$, так что

$$T = \frac{1}{2}\left(M + \frac{m}{3}\right)\dot{x}^2.$$

Отметим, что при составлении выражения для L можно опускать слагаемые вида $a\theta + b$, где a, b — константы; как видно из (14), это не отражается на получаемых уравнениях движения. С точностью до таких слагаемых свободная энергия совершенного газа с постоянной теплоёмкостью, выраженная как функция x и θ, равна

$$\Psi = C\theta\left(1 - \ln\frac{\theta}{\theta_0}\right) - mR\theta\ln\frac{x}{x_0},$$

где R — газовая постоянная, θ_0 и x_0 — некоторые значения θ и x.

Обобщённые силы, отвечающие сжимающей силе F и силе вязкого трения, равны соответственно $-F$ и $-\mu\dot{x}$, так что $Q_x = -F - \mu\dot{x}$ (термоупругую силу учитывать не надо).

Термическая сила в данном примере состоит из двух слагаемых: $\Phi = -K(\theta - \theta^*)/\theta + \mu\dot{x}^2/\theta$; первое характеризует теплообмен с внешней средой, а второе — тепловыделение за счёт трения.

Вычисляя L по формуле $L = T - \Psi$ (здесь $V = 0$) и учитывая выражения для Q_x и Φ, получаем следующие уравнения движения системы S в форме (14):

$$\begin{aligned} \left(M + \frac{m}{3}\right)\ddot{x} - \frac{mR\theta}{x} &= -F - \mu\dot{x}, \\ \frac{C}{\theta}\dot{\theta} + \frac{mR}{x}\dot{x} &= \frac{\mu\dot{x}^2}{\theta} - \frac{K(\theta - \theta^*)}{\theta}. \end{aligned} \qquad (15)$$

Подчеркнём, что при выводе уравнений (15) не требовалось находить выражение для энтропии η.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Новожилов И. В., Зацепин М. Ф.* Типовые расчёты по теоретической механике на базе ЭВМ. — М.: Высшая школа, 1986. — 136 с.

2. *Ильин В. Н.* Основы автоматизации схемотехнического проектирования. — М.: Энергия, 1979. — 392 с.

3. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. — М.: Мир, 1975. — 592 с.

4. *Гельфер Я. М.* История и методология термодинамики и статистической физики. — М.: Высшая школа, 1981. — 536 с.

5. *Петров Н., Бранков Й.* Современные проблемы термодинамики. — М.: Мир, 1986. — 288 с.

6. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. — М.: Наука, 1983. — Т. 1. — 528 с.

Файл представляет собой реставрированный вариант печатной версии статьи, опубликованной в сборнике 1990 года.

Исправлено заглавие статьи (в печатной версии статьи вместо «формализм» стояло «механизм», хотя в Реферативный журнал ВИНИТИ «Механика» вместе с аннотацией было передано правильное заглавие статьи). Пагинация сохранена.

Рекомендуемая форма ссылки на статью:

Осадченко Н.В. Лагранжев формализм в динамике термомеханических систем // Сборник научно-методических статей по теоретической механике. Вып. 20. — М.: Изд-во МПИ, 1990. — С. 43—51.