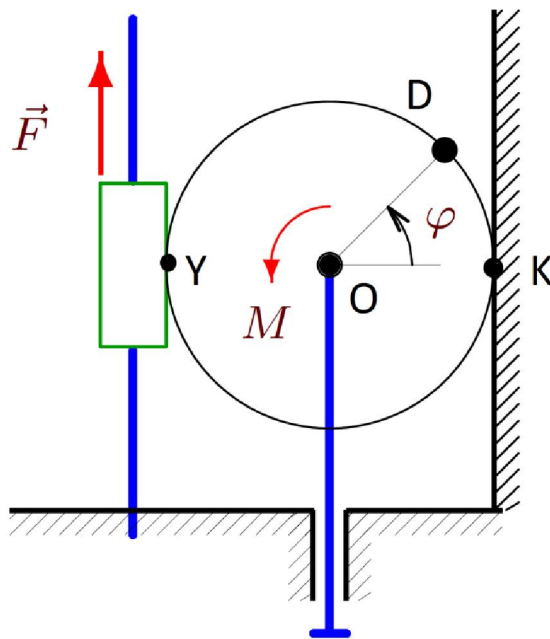


Задача D-13-12 (Мешков Андрей, МЭИ, 2013)



Дано:

$$R=1 \text{ м}$$

$$m_D=10 \text{ кг}$$

$$M=56 \text{ Нм}$$

$$F=2 \text{ Н}$$

$$m_{III}=2 \text{ кг}$$

$$\sin \varphi=0,8$$

$$\dot{\varphi}=2 \text{ с}^{-1}$$

$$\ddot{\varphi}=?$$

Решение:

Найдем расстояние от точки D до точки K (DK):

$$DK^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cos \varphi = 2R^2(1 - \cos \varphi) \quad (1)$$

Найдем скорость точки O, для этого составим кинематический граф:

$$K \xrightarrow{\pi} O$$

$$v_{ox} = v_{Kx} - \dot{\varphi} R \sin \pi = 0 \quad (2)$$

$$v_{oy} = v_{Ky} + \dot{\varphi} R \cos \pi = -\dot{\varphi} R \quad (3)$$

Найдем скорость точки D, для этого составим кинематический граф:

$$K \xrightarrow{\pi/2+\varphi} D$$

$$v_{Dx} = v_{Kx} - \dot{\varphi} DK \sin \left( \frac{\pi}{2} + \varphi \right) = -\dot{\varphi} DK \cos \varphi \quad (4)$$

$$v_{Dy} = v_{Ky} + \dot{\varphi} DK \cos \left( \frac{\pi}{2} + \varphi \right) = -\dot{\varphi} DK \sin \varphi \quad (5)$$

Найдем скорость точки Y, для этого составим кинематический граф:

$$K \xrightarrow{\pi} Y$$

$$v_{Yx} = v_{Kx} - 2\dot{\varphi} R \sin \pi = 0 \quad (6)$$

$$v_{Yy} = v_{Ky} + 2\dot{\varphi} R \cos \pi = -2\dot{\varphi} R \quad (7)$$

Записываем вид кинетической энергии системы:

$$\begin{aligned} T = T_1 + T_2 + T_3 &= \frac{m_\delta v_{Oy}^2}{2} + \frac{I_\delta \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_D (v_{Dx}^2 + v_{Dy}^2)}{2} + \frac{m_{III} v_{Oy}^2}{2} = \frac{m_\delta \dot{\varphi}^2 R^2}{2} + \frac{0,5 \cdot m_\delta R^2 \dot{\varphi}^2}{2} + \\ &+ \frac{m_D \dot{\varphi}^2 2 R^2 (1 - \cos \varphi)}{2} + \frac{m_{III} \dot{\varphi}^2 R^2}{2} = \frac{\dot{\varphi}^2 R^2}{2} (1,5 m_\delta + 2(1 - \cos \varphi) m_D + m_{III}) \\ T &= \frac{\dot{\varphi}^2}{2} (1,5 m_\delta + 2(1 - \cos \varphi) m_D + m_{III}) R^2 \quad (8) \end{aligned}$$

Запишем обобщённую силу:

$$Q = \frac{1}{\dot{\varphi}} (F \cdot v_{Yy} + M \dot{\varphi}) = \frac{1}{\dot{\varphi}} \cdot F (-2\dot{\varphi} R) + M = M - 2FR \quad (9)$$

Запишем вид уравнения Лагранжа 2-го рода для данной задачи:

$$Q = \ddot{\varphi} f(\varphi) + \frac{\dot{\varphi}^2}{2} f'(\varphi) \quad (10)$$

Подставляем:

$$M - 2FR = \ddot{\varphi} (1,5 m_\delta + 2(1 - \cos \varphi) m_D + m_{III}) R^2 + \dot{\varphi}^2 m_D \sin \varphi \quad (11)$$

Искомое угловое ускорение:

$$\ddot{\varphi} = \frac{M - 2FR - \dot{\varphi}^2 m_D \sin \varphi}{(1,5 m_\delta + 2(1 - \cos \varphi) m_D + m_{III}) R^2} \quad (12)$$

Найдем недостающие компоненты выражения:

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - 0,64} = 0,6 \quad (13)$$

масса диска равна 0 кг ( $m_\delta = 0$  кг)

Подставляя известные величины в формулу (12), найдем искомое угловое ускорение:

$$\ddot{\varphi} = \frac{M - 2FR - \dot{\varphi}^2 m_D \sin \varphi}{(1,5 m_\delta + 2(1 - \cos \varphi) m_D + m_{III}) R^2} = \frac{56 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 2^2 \cdot 10 \cdot 0,8}{(1,5 \cdot 0 + 2(1 - 0,6)10 + 2)^2} = 2c^{-2}$$

Ответ:  $\ddot{\varphi} = 2c^{-2}$