Нестабильность решения уравнения задачи о растекании пластического материала

Кирсанов М.Н., Вылъева С.В., Федорова М.И.

Московский энергетический институт (Технический университет)

Анализ нелинейного уравнения Кийко-Безухова [1] на стабильность приращений формы границы растекания пластического материала и ее скоростей по отношению к возмущениям высших производных показал, что существуют области нестабильности формы границы материала. Под нестабильностью [2] понимается вырождение связи приращений производных функции, входящей в данное уравнение. Порядок нестабильности определяется порядком задаваемых производных приращений.

Пусть слой пластического материала в начальный момент времени занимает в плоскости xy некоторую область S_0 с контуром Γ_0, уравнение которого $y = \varphi_0(x) = \varphi(x, 0)$. К моменту времени t область принимает форму S с контуром $\Gamma: y = \varphi(x, t)$. Задачей является определение функции $\varphi(x, t)$. Уравнение для определения $\varphi(x, t)$, имеет вид

$$2\varphi + \frac{1}{4}\varphi_x^2 + \frac{1}{2}\varphi\varphi_{xx} - \varphi_t = 0, \qquad (1)$$

где частные производные обозначены нижним индексом.

Продифференцируем уравнение (1) по переменным x, t. Получим следующие два уравнения:

$$2\varphi_t + \frac{1}{2}\varphi_x\varphi_{tx} + \frac{1}{2}\varphi_t\varphi_{xx} + \frac{1}{2}\varphi\varphi_{txx} - \varphi_{tt} = 0, \qquad (2)$$

$$2\varphi_x + \varphi_x\varphi_{xx} + \frac{1}{2}\varphi\varphi_{xxx} - \varphi_{tx} = 0. \qquad (3)$$

Линеаризуем каждое из уравнений (1) – (3) для приращений

$\Delta\varphi, \Delta\varphi_t, \Delta\varphi_x, \Delta\varphi_{tt}, \Delta\varphi_{tx}, \Delta\varphi_{xx}, \Delta\varphi_{txx}, \Delta\varphi_{xxx}$.

В результате получим следующую систему:

$$\begin{cases} \Delta\varphi\left(2 + \frac{1}{2}\varphi_{xx}\right) + \Delta\varphi_x\frac{1}{2}\varphi_x - \Delta\varphi_t = -\Delta\varphi_{xx}\frac{1}{2}\varphi, \\ \Delta\varphi\frac{1}{2}\varphi_{txx} + \Delta\varphi_x\frac{1}{2}\varphi_{tx} + \Delta\varphi_t\left(2 + \frac{1}{2}\varphi_{xx}\right) = \Delta\varphi_{tt} - \Delta\varphi_{tx}\frac{1}{2}\varphi_x - \Delta\varphi_{xx}\frac{1}{2}\varphi_t - \Delta\varphi_{txx}\frac{1}{2}\varphi, \\ \Delta\varphi\frac{1}{2}\varphi_{xxx} + \Delta\varphi_x(2 + \varphi_{xx}) = \Delta\varphi_{tx} - \Delta\varphi_{xx}\varphi_x - \Delta\varphi_{xxx}\frac{1}{2}\varphi. \end{cases}$$

В матричном виде эта система имеет вид: $A \cdot \Delta\Phi = B$ или

$$\begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{2}\varphi_{xx} & \frac{1}{2}\varphi_x & -1 \\ \frac{1}{2}\varphi_{txx} & \frac{1}{2}\varphi_{tx} & 2 + \frac{1}{2}\varphi_{xx} \\ \frac{1}{2}\varphi_{xxx} & (2 + \varphi_{xx}) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\varphi_x \\ \Delta\varphi_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta\varphi_{xx}\frac{1}{2}\varphi \\ \Delta\varphi_{tt} - \Delta\varphi_{tx}\frac{1}{2}\varphi_x - \Delta\varphi_{xx}\frac{1}{2}\varphi_t - \Delta\varphi_{txx}\frac{1}{2}\varphi \\ \Delta\varphi_{tx} - \Delta\varphi_{xx}\varphi_x - \Delta\varphi_{xxx}\frac{1}{2}\varphi \end{pmatrix}$$

Производные от приращений, стоящие в правой части (матрица B), имеют порядок 2 и 3. Соответственно порядок нестабильности в этом случае равен *(2,3)*. Для дальнейшего изучения нестабильности нам необходима матрица A, называемая в дальнейшем матрицей нестабильности соответствующего порядка. Определитель этой матрицы имеет вид:

$$\det(A) = -8 - 8\varphi_{xx} - \frac{5}{2}\varphi_{xx}^2 - \frac{1}{4}\varphi_{xx}^3 - \varphi_{txx} - \frac{1}{2}\varphi_{txx}\varphi_{xx} + \frac{1}{2}\varphi_{xxx}\varphi_x + \frac{1}{8}\varphi_{xxx}\varphi_x\varphi_{xx} + \frac{1}{4}\varphi_{xxx}\varphi_{tx}. \qquad (4)$$

Для нахождения точек нестабильности, необходимо решить уравнение $\det(A) = 0$. Исследуем это уравнение при различных видах функции $\varphi(x,t)$, найденных Кийко И.А. [1].

1. Рассмотрим линейное решение

$$\varphi(x,t) = ae^{2t}x + \left(b + \frac{1}{8}a^2(e^{2t} - 1)\right)e^{2t}, \tag{5}$$

где a, b— параметры, связанные с начальными данными. Подставив эту функцию в формулу (4), получаем: $\det(A) = -8$. Определитель в ноль не обращается. Таким образом, точек нестабильности порядка (2,3) линейного решения нет.

2. Уравнение (1) допускает решение вида

$$\varphi(x,t) = \frac{ae^{2t}}{(1+a)\left(1 - \frac{ae^{2t}}{1+a}\right)}x^2 + \frac{be^{2t}}{\sqrt{1+a}\sqrt{1 - \frac{ae^{2t}}{1+a}}}, \tag{6}$$

где a, b — параметры, связанные с начальными данными. Подставив эту функцию и ее частные производные в формулу (4), получаем

$$\det(A) = -\frac{2(1+a)(-4a^2 + 2a^2e^{2t} - a^2e^{4t} - 8a + 2ae^{2t} - 4)}{(1 - a + ae^{2t})^3}$$

В данном случае уравнения $\det(A) = 0$ не имеет действительных корней. Таким образом, в случае, когда функция $\varphi(x,t)$ имеет вид (6), ни при каких значениях (x,t) для уравнения (1) не возникает нестабильности порядка (2,3).

Исследуем нестабильность (1) более высокого порядка. Дифференцируя (1) по времени *t* и координате *x*, получим

$$2\varphi_{tt} + \frac{1}{2}\varphi_{tx}^2 + \frac{1}{2}\varphi_x\varphi_{ttx} + \frac{1}{2}\varphi_{tt}\varphi_{xx} + \varphi_t\varphi_{txx} + \frac{1}{2}\varphi\varphi_{ttxx} - \varphi_{ttt} = 0, \tag{7}$$

$$2\varphi_{tx} + \varphi_{tx}\varphi_{xx} + \varphi_x\varphi_{txx} + \frac{1}{2}\varphi_t\varphi_{xxx} + \frac{1}{2}\varphi\varphi_{txxx} - \varphi_{ttx} = 0, \tag{8}$$

$$2\varphi_{xx} + \varphi_{xx}^2 + \frac{3}{2}\varphi_x\varphi_{xxx} + \frac{1}{2}\varphi\varphi_{xxxx} - \varphi_{txx} = 0, \tag{9}$$

Линеаризуя уравнения $(1)-(3), (7)-(9)$ по соответствующим приращениям, получаем систему из шести уравнений. В матричном виде она выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 2+\frac{1}{2}\varphi_{xx} & \frac{1}{2}\varphi_x & -1 & \frac{1}{2}\varphi & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\varphi_{txx} & \frac{1}{2}\varphi_{tx} & 2+\frac{1}{2}\varphi_{xx} & \frac{1}{2}\varphi_t & \frac{1}{2}\varphi_x & -1 \\ \frac{1}{2}\varphi_{xxx} & 2+\varphi_{xx} & 0 & \varphi_x & -1 & 0 \\ \frac{1}{2}\varphi_{ttxx} & \frac{1}{2}\varphi_{ttx} & \varphi_{txx} & \frac{1}{2}\varphi_{tt} & \varphi_{tx} & 2+\frac{1}{2}\varphi_{xx} \\ \frac{1}{2}\varphi_{txxx} & \varphi_{txx} & \frac{1}{2}\varphi_{xxx} & \varphi_{tx} & 2+\varphi_{xx} & 0 \\ \frac{1}{2}\varphi_{xxxx} & \frac{3}{2}\varphi_{xxx} & 0 & 2+2\varphi_{xx} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\varphi_x \\ \Delta\varphi_t \\ \Delta\varphi_{xx} \\ \Delta\varphi_{tx} \\ \Delta\varphi_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\Delta\varphi_{txx}\frac{1}{2}\varphi \\ -\Delta\varphi_{xxx}\frac{1}{2}\varphi \\ \Delta\varphi_{ttt} - \Delta\varphi_{ttx}\frac{1}{2}\varphi_x - \Delta\varphi_{txx}\varphi_t - \Delta\varphi_{ttxx}\varphi \\ \Delta\varphi_{ttx} - \Delta\varphi_{txx}\varphi_x - \Delta\varphi_{xxx}\frac{1}{2}\varphi_t - \Delta\varphi_{txxx}\frac{1}{2}\varphi \\ \Delta\varphi_{txx} - \Delta\varphi_{xxx}\frac{3}{2}\varphi_x - \Delta\varphi_{xxxx}\frac{1}{2}\varphi \end{pmatrix}$$

Матрица, стоящая в левой части, — это матрица нестабильности. В правой части стоит матрица приращений, порядок производной в которой определяет порядок нестабильности. В случае обращения определителя матрицы системы в ноль будем иметь нестабильность порядка (3,4). Определитель матрицы имеет вид:

$$\det(A) = F\left(\varphi(x,t), \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial^{i+j}\varphi(x,t)}{\partial^i x \partial^j t}\right), \qquad i,j = 0..4, i+j \leq 4.$$

Исследуем поведение определителя при различных видах функции $\varphi(x,t)$.

1. Линейное решение. Подставив (5) в выражение для определителя, получаем $\det(A) = 64$. Таким образом, в случае функции $\varphi(x,t)$, определяемой формулой (5), ни при каких значениях (x,t) нестабильности порядка *(3,4)* не возникает.

2. Нелинейное решение (6). В этом случае определитель матрицы нестабильности выражается формулой:

$$\det(A) = 8(1+a)(20a^5e^{4t} + 11a^5e^{6t} + 2a^5e^{8t} + 8a^5 - a^5e^{10t} + 20a^5e^{2t} + 40a^4 + 60a^4e^{4t} + 2a^4e^{8t} + \\ +80a^4e^{2t} + 22a^4e^{6t} + 120a^3e^{2t} + 11a^3e^{6t} + 60a^3e^{4t} + 80a^3 + 80a^2e^{2t} + 20a^2e^{4t} + 80a^2 + 20ae^{2t} \\ + 40a + 8)/(-1 - a + ae^{2t})^6$$

Решая уравнение $\det(A) = 0$, получаем два действительных корня:

$$t_1 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5.096(1+a)}{a}\right) \qquad (10) \qquad \text{и} \qquad t_2 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{-(1+a)}{a}\right) \qquad (11)$$

Таким образом, при значениях t, равных t_1 или t_2, определитель матрицы нестабильности порядка (3,4) в случае функции $\varphi(x,t)$ вида (6) обращается в нуль. Т.е. в этих точках возникает нестабильность порядка (3,4) уравнения (1). Как видно из формул (10), (11), значение точек нестабильности зависит от начальных данных, а именно от параметра a. Отобразим эту зависимость графически:

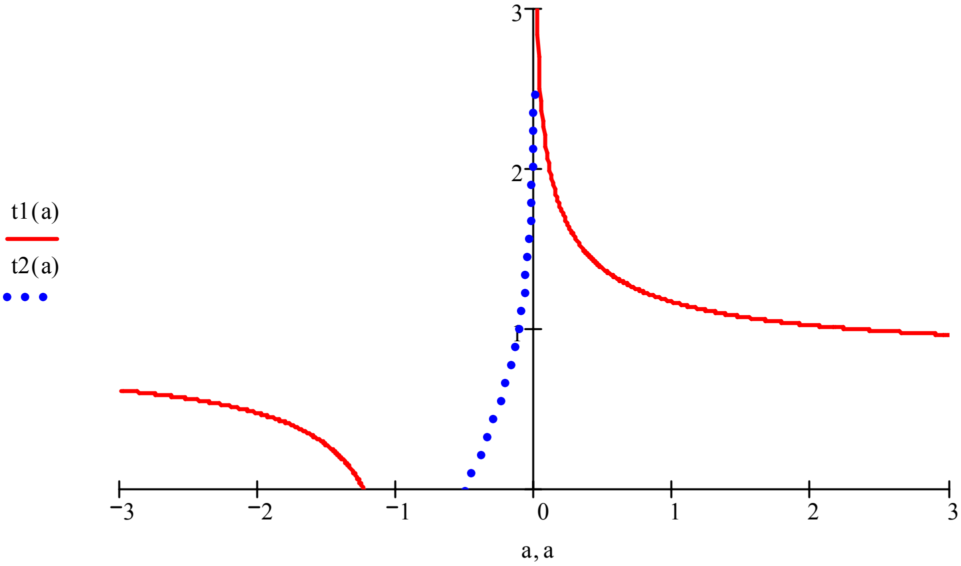

Рис. 1

Как видно из рисунка, ни при каких значениях параметра a, значения t_1 (сплошная линия) и t_2 (пунктир) не совпадают. Т.е. исходное уравнение (1) имеет одну точку нестабильности порядка (3,4), определяемую из формулы (10) или (11) в зависимости от значения начального параметра a. При $a \in (-1.244, -0.5)$ уравнение стабильно в указанном смысле.

Литература

1. Вязко-пластическое течение материалов, ч.2./под редакцией И.А.Кийко. М.:МГУ, 2001.
2. **Кирсанов М.Н.** Определение и анализ стабильности движения с использованием системы Maple. - **Exponenta Pro**. Математика в приложениях, №3-4. 2004, с.134-137.