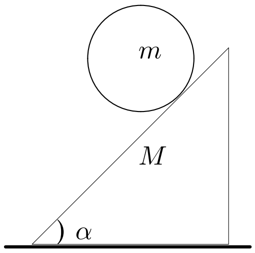
К решению олимпиадной задачи (МАДИ 2003)

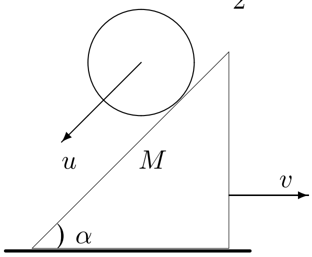
Сплошной однородный круговой цилиндр массой m скатывается по боковой поверхности призмы массой M. Призма может скользить без трения по горизонтальной поверхности. Движение начинается из состояния покоя. Сопротивлением качению пренебречь. При каком коэффициенте трения между цилиндром и призмой качение будет без проскальзывания?



Решение.

Кинетическая энергия системы

$$T := \frac{M\,v^2}{2} + \frac{m\,u^2}{4} + \frac{1}{2}\,m\,((v - u\cos\alpha)^2 + u^2\sin^2\alpha)$$



или
$$T := \frac{M\,v^2}{2} + \frac{3\,m\,u^2}{4} + \frac{m\,v^2}{2} - m\,v\,u\cos\alpha$$

Система уравнений Лагранжа 2-го рода

$$\frac{3\,m\,\dot u}{2} - m\,\dot v\cos\alpha = m\,g\sin\alpha$$
$$M\,\dot v + m\,\dot v - m\,\dot u\cos\alpha = 0.$$

Решаем систему

$$\dot v = -\frac{2\,m\cos\alpha\,g\sin(a)}{-3\,M - 3\,m + 2\,m\cos^2\alpha}$$
$$\dot u = \dot v(m + M)/(m\cos\alpha)$$

Сила трение входит в дифференциальное уравнение плоского движения цилиндра

$$RF = J\dot u/R,$$

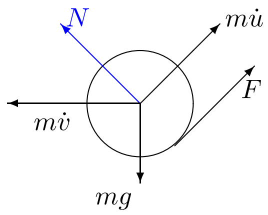
где $J = mR^2/2$, и

$$F = -\frac{m\,g\sin\alpha\,(M + m)}{-3\,M - 3\,m + 2\,m\cos^2\alpha} \tag{1}$$

В предельном случае F удовлетворяет закону Кулона

$$F = fN$$

Нормальную реакцию N можно выразить из равновесия цилиндра по Даламберу на нормаль к плоскости качения



$$N = mg\cos\alpha - m\dot{v}\sin\alpha$$

или

$$N = m\,g\cos\alpha + \frac{2\,m^2\cos\alpha\,g\sin^2\alpha}{-3\,M - 3\,m + 2\,m\cos^2\alpha} \tag{2}$$

Из (1) и (2) получим

$$f > \frac{\sin\alpha\,(M+m)}{\cos\alpha\,(3\,M+m)}$$