

1. СТАТИКА

При решении задач статики прежде всего надо выбрать тело или систему тел, равновесие которых рассматриваем. Затем необходимо определить, является ли задача статически определимой.

Необходимым условием статической определимости является равенство нулю числа степеней свободы S . Число степеней свободы определяется формулой

$$S = \sum_{i=1}^N k_i - m - n,$$

где N – число составляющих тел; k_i – число независимых уравнений равновесия для каждого тела в зависимости от вида системы сил, действующих на тело; m, n – число неизвестных составляющих реакций внешних и внутренних связей, наложенных на систему тел соответственно. Если $S > 0$, то механическая система является механизмом; при $S < 0$ задача статически неопределима.

В задачах статики прежде всего необходимо понять, каким методом будет решаться задача, – методом геометрической (посредством уравнений равновесия для систем сил) или аналитической (принципом возможных перемещений) статики.

Основой метода геометрической статики являются расчетные схемы, на которых показаны тела или совокупности тел, освобожденные от связей. В олимпиадных задачах обычно не требуется определять все неизвестные реакции или уравновешивающие силы, поэтому высокой оценки могут заслуживать решения, в которых минимальным числом действий определены только указанные в условии искомые величины. При решении задачи, применив аксиому о затвердевании, можно рассматривать систему тел или равновесие одного из тел, не составляя при этом лишних уравнений равновесия. Выбирая удачным образом точку или ось для составления уравнения моментов и ось для уравнения проекций сил, можно получить минимальное число уравнений для решения задачи. При действии на тело уравновешенной плоской системы трех непараллельных сил можно применить теорему о трех силах.

Очень внимательно нужно относиться к арифметическим вычислениям и тригонометрическим преобразованиям.

Если систему сил, приложенных к телу, удастся свести к трем, эффективное решение достигается путем применения теоремы о трех силах.

Основой аналитической статики является принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа), позволяющий из одного уравнения определить неизвестную величину. Его применяют для систем, находящихся в равновесии, на которые наложены идеальные связи. В статических конструкциях, число степеней свободы которых равно нулю, применяют прием последовательного снятия связей с добавлением в систему активных сил соответствующих реакций.

Особое внимание следует обратить на задачи с трением скольжения и качения. В этих задачах из уравнений предполагаемого равновесия надо найти силу трения скольжения $F_{\text{тр}}$ или момент трения качения $M_{\text{тр}}$, используя при этом законы трения:

$$0 \leq F_{\text{тр}} \leq F_{\text{трmax}}, \quad 0 \leq M_{\text{тр}} \leq M_{\text{трmax}},$$

где $F_{\text{трmax}} = fN$; $M_{\text{трmax}} = \delta N$; N – нормальное давление на поверхность в точке контакта; $N > 0$; $F_{\text{тр}}$ – сила трения.

Подставляя значения $F_{\text{тр}}$, $M_{\text{тр}}$, найденные из уравнений равновесия, исследуем эти неравенства. При выполнении этих неравенств равновесие в какой-то области изменения исследуемых величин не нарушено, нет отрыва, скольжения или качения. Если эти неравенства не выполняются, то равновесие тела невозможно.

Для плоских задач статики можно графически построить область равновесия: это геометрическое решение основано на том условии, что полная реакция плоскости находится внутри конуса трения.

С-1. (Космодемьянский В.А., МГТУ, 2001) Два однородных стержня (рис. 1) одинаковой длины $2L$, соединенные шарнирно, расположены в вертикальной плоскости и проходят через шарнирно закрепленные на неподвижных опорах втулки A и B .

Найти симметричные формы равновесия системы при условии $AB = L$.

В положении равновесия точке O сообщается малая скорость по вертикали ϵ и система начинает движение. Дайте качественный анализ дальнейшего движения системы. Устойчива ли найденная форма равновесия?

Решение методом геометрической статики. Из условий равновесия системы (рис. 2, а) имеем

$$N_2 = N_1 = N = P / \cos \alpha.$$

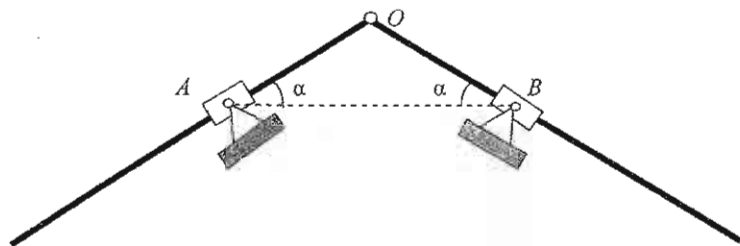
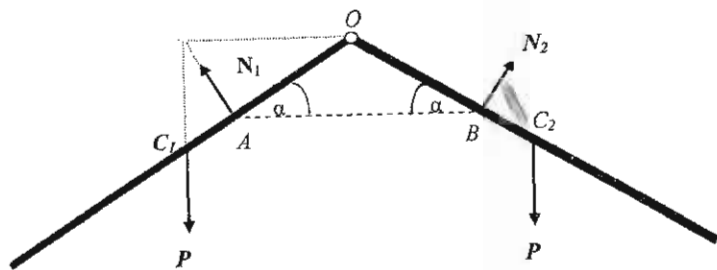


Рис. 1

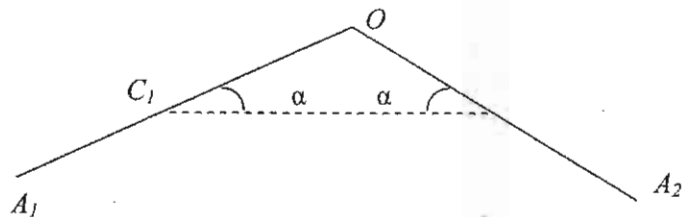
Из условий равновесия любого из стержней имеем

$$\sum M_O(\vec{F}_k) = NOA - PL \cos \alpha = 0,$$

где $OA = \frac{L}{2 \cos \alpha}$; $N = 2P \cos^2 \alpha$.

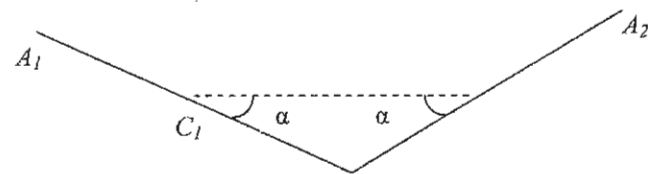


а



б

Рис. 2 (начало)



в

Рис. 2 (окончание)

Следовательно, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, что соответствует значениям углов $\alpha_1 = 37,5^\circ$ и $\alpha_2 = -37,5^\circ$.

Решение методом аналитической статики (следствие из принципа Лагранжа при потенциальных силах). Потенциальная энергия системы (нулевой уровень выбран на горизонтали AB)

$$\begin{aligned} \Pi = -2Ph = -2PAC_1 \sin \alpha &= -2P \left(L - \frac{L}{2 \cos \alpha} \right) \sin \alpha = \\ &= -PL(2 \sin \alpha - \operatorname{tg} \alpha). \end{aligned}$$

Из условия экстремума $\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = -PL \left(2 \cos \alpha - \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) = 0$ получаем те же значения для угла α , что и найденные выше. Условия теоремы Лагранжа выполняются для $\alpha = \alpha_1$:

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \alpha^2} \right|_{\alpha = \alpha_1} = 2PL \sin \alpha_1 \left(1 + \frac{1}{\cos^3 \alpha_1} \right) > 0.$$

Следовательно, данная форма отвечает устойчивому равновесию (рис. 2, б). При $\alpha = \alpha_2$ потенциальная энергия не имеет минимума, однако она является аналитической функцией, и в соответствии с теоремой Н.Г.Четаева равновесие неустойчиво (рис. 2, в).

С-2 ([1]). В стержневой системе, расположенной в вертикальной плоскости, $AC = OC$; стержни 1 и 2 однородны и имеют вес P_1 и P_2 соответственно. Определить силу натяжения пружины, если в положении системы, изображенном на рис. 3, $\angle ABO = 90^\circ$, $\angle OAB = \alpha$, точки O, C и A лежат на одной прямой.

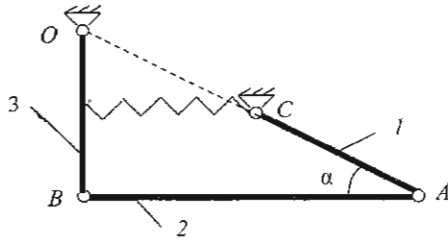


Рис. 3

Решение методом геометрической статики.

Из уравнения равновесия стержня AB (рис. 4, а) $\sum M_A = Y_B AB - P_2 (AB/2) = 0$ находим $Y_B = P_2/2$.

Для системы стержней CAB ($OC = CA = l$) верно $\sum M_C = Y_B l \cos \alpha + P_1 l \cos \alpha/2 - X_B l \sin \alpha = 0 \rightarrow X_B = (P_1 + P_2) \operatorname{ctg} \alpha/2$ (рис. 4, б).

Для стержня OB' верно равенство $\sum M_O = X_B OB - F (OB/2) = 0 \rightarrow F = 2X_B = (P_1 + P_2) \operatorname{ctg} \alpha$ (рис. 4, в).

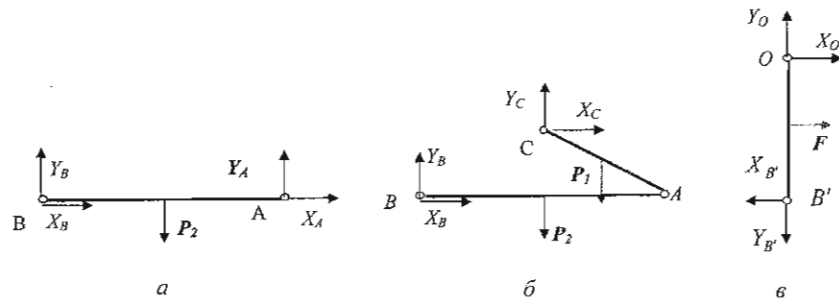


Рис. 4

Решение методом аналитической статики (принцип возможных перемещений). Проекции возможных перемещений точек A и B на прямую AB равны, и, следовательно, возможное перемещение $\delta \varphi_2 2l/\sin \alpha = \delta \varphi_1 l/\sin \alpha$, откуда $2\delta \varphi_2 = \delta \varphi_1$.

Кроме того, мгновенный центр возможных перемещений звена 2 на рис. 3 совпадает с шарниром O, и $\delta \varphi_2 = \delta \varphi_3$. Тогда из уравнения работ (рис. 5)

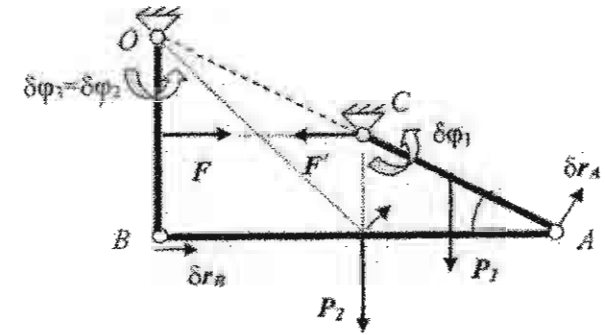


Рис. 5

$$\sum_k \delta A_k = -P_1 \frac{l \cos \alpha \delta \varphi_1}{2} - P_2 l \cos \alpha \delta \varphi_2 + F l \sin \alpha \delta \varphi_3 = 0$$

находим

$$F = (P_1 + P_2) \operatorname{ctg} \alpha.$$

С-3 (УГТУ-УПИ). Брусок весом 100 Н находится на верхней грани другого бруска весом 200 Н, который в свою очередь располагается на горизонтальной плоскости. На верхний брусок под углом 30° к горизонту действует сила, равная 60 Н. Коэффициенты трения между брусками и между нижним бруском и опорной плоскостью равны 0,5 и 0,2 соответственно.

Определить, будут ли бруски двигаться относительно друг друга и относительно плоскости.

Решение. Полагаем, что бруски неподвижны; тогда можно применить уравнения статики. Из уравнений равновесия верхнего бруска (рис. 6, а)

$$\sum F_{kx} = F_1 - P \cos 30^\circ = 0, \quad \sum F_{ky} = N_1 - P \sin 30^\circ - P_1 = 0$$

находим $F_1 = 30\sqrt{3} \approx 52$ Н, $N_1 = P_1 + P/2 = 130$ Н. Так как $F_1 < f_1 N_1 = 0,5 \cdot 130 = 65$ Н, условие непроскальзывания выполняется: бруски друг относительно друга не скользят.

Аналогично для системы брусков (рис. 6, б) из уравнений

$$\sum F_{kx} = F_2 - P \cos 30^\circ = 0, \quad \sum F_{ky} = N_2 - P \sin 30^\circ - P_1 - P_2 = 0$$

находим $F_2 = F_1$, $N_2 = P_1 + P_2 + P/2 = 330$ Н. Так как $F_2 < f_2 N_2 = 0,2 \cdot 330 = 66$ Н, условие неспрокальзывания нижнего бруска по опорной плоскости также выполняется.

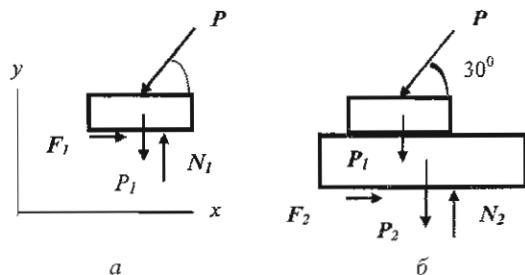


Рис. 6

С-4 (УГТУ-УПИ). Однородная балка AB длиной $2L$ и весом P опирается концами A и B на взаимно перпендикулярные шероховатые плоскости, углы наклона которых к горизонту равны α и β (рис. 7). Коэффициент трения концов балки о плоскости равен f . На балке располагается груз весом Q .

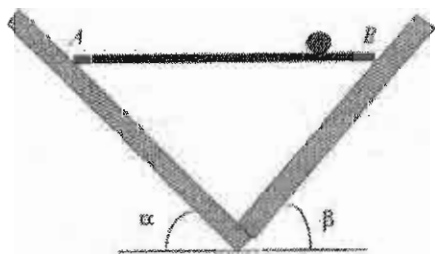


Рис. 7

Найти наименьшее значение расстояния s груза от конца B балки, при котором она будет занимать горизонтальное положение.

Аналитическое решение. Рассматриваем равновесие системы, соответствующее крайнему правому положению груза, в котором силы трения имеют максимально возможные значения.

Из уравнений проекций на координатные оси ($\cos\beta = \sin\alpha$, $\operatorname{tg}\varphi = f$)

$$\sum_k F_{kx} = N_A + f N_B - (P+Q)\cos\alpha = 0$$

и

$$\sum_k F_{ky} = N_B - f N_A - (P+Q)\sin\alpha = 0$$

исключаем N_B и находим $N_A = \frac{P+Q}{1+f^2}(\cos\alpha - f\sin\alpha) = (P+Q)\cos(\alpha+\varphi)\cos\varphi$.

Подставляем N_A в уравнение:

$$\begin{aligned} \sum_k M_B(\vec{F}_k) &= PL + Qs - N_A 2L(\cos\alpha - f\sin\alpha) = \\ &= PL + Qs - 2(P+Q)L \cos^2(\alpha+\varphi) = 0 \end{aligned}$$

и находим $s/L = 2\left(1 + \frac{P}{Q}\right)\cos^2(\alpha+\varphi) - \frac{P}{Q}$.

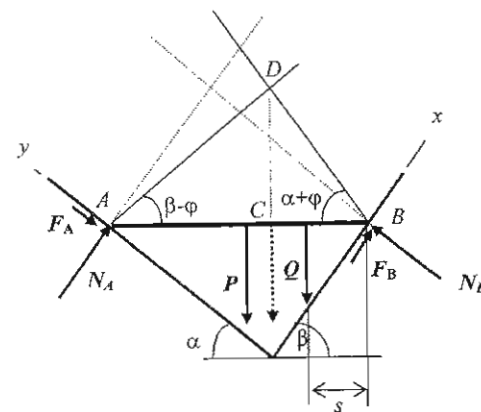


Рис. 8

Геометрическое решение (рис. 8). Для предельного положения проведем линии действия полных реакций шероховатых поверхностей, откладывая их от нормалей на угол трения $\varphi = \operatorname{arctg}f$. Заменяем силы P и Q их равнодействующей $R = P + Q$. Задача сведена к теореме о трех силах, линии действия которых при равновесии пересекаются в одной точке. Расстояние s будет минимальным, когда равнодействующая пройдет через точку D . По теореме Вариньона $(P+Q)BC = PL + Qs$. Так как треуголь-

ники ABD и DBC прямоугольные, $BC = BD \cos(\alpha + \varphi) = 2L \sin(\beta - \varphi) \cos(\alpha + \varphi) = 2L \cos^2(\alpha + \varphi)$. Таким образом, получаем аналогичный результат.

С-5 (МГТУ, 1995). Однородный стержень AB весом P упирается верхним концом в угол, образованный двумя взаимно перпендикулярными плоскостями; нижний конец находится на горизонтальной плоскости и удерживается нитью, закрепленной в точке D , и упором, плоскость которого Q (рис. 9).

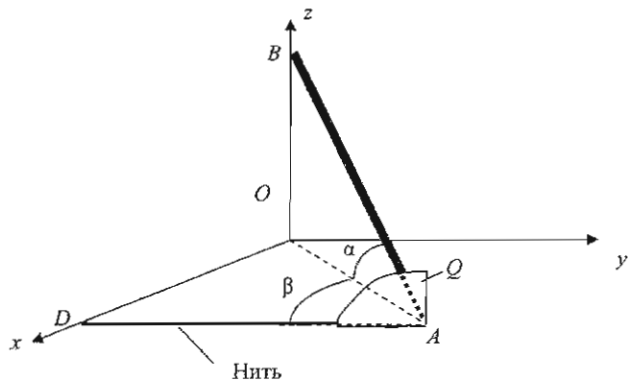


Рис. 9

Полагая поверхности гладкими, найти величину силы натяжения нити для значений углов $\alpha = 30^\circ$ и $\beta = 60^\circ$.

Аналитическое решение 1. Для расчетной схемы, представленной на рис. 10, имеем

$$\sum F_{kz} = Z_A - P = 0 \rightarrow Z_A = P,$$

$$\sum M_{Bx}(\vec{F}_k) = Z_A AB \cos \alpha \cos \beta - P \frac{AB}{2} \cos \alpha \cos \beta - FAB \sin \alpha = 0.$$

$$\text{Отсюда } F = \frac{P}{2} \operatorname{ctg} \alpha \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{4} P.$$

Аналитическое решение 2. Задача сводится к теореме о трех силах: $\vec{P} + \vec{R}_A + \vec{R}_B = 0$. Из уравнения проекций на ось z для нее имеем

$$R_A \sin \gamma = P,$$

где $\operatorname{tg} \gamma = 2OB/OA = 2 \sin \alpha / \cos \alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha$. Силу натяжения F найдем методом двойного проецирования реакции R_A и получаем тот же результат.

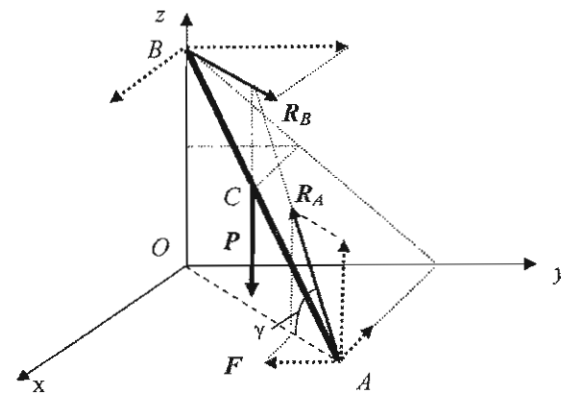


Рис. 10

Решение по принципу возможных перемещений. Снимем нить на конце A и заменим ее действие силой F . Так как оставшиеся связи идеальные, уравнение работ будет иметь вид

$$\sum_k \delta A_k = \vec{P} \delta \vec{r}_C + \vec{F} \delta \vec{r}_A = P |\delta z_C| - F \delta y_A = 0,$$

где $\delta z_C = \delta z_B / 2$, δy_A , δz_B — вариации координат, удовлетворяющие уравнению связи $x_A^2 + y_A^2 + z_B^2 = (AB)^2$.

Так как $x_A = \operatorname{const}$, $2y_A \delta y_A - 2z_B |\delta z_B| = 0$, где $y_A = L \cos \alpha \cos \beta$ и $z_B = L \sin \alpha$, получаем

$$F = \frac{P y_A}{2 z_B} = \frac{P}{2} \operatorname{ctg} \alpha \cos \beta.$$

2. КИНЕМАТИКА

Приведенные здесь типичные задачи студенческих олимпиад посвящены в основном кинематике сложного движения точки и кинематике плоского движения твердого тела.

Большое значение имеет выбор подвижной системы отсчета. Применение подвижных осей (естественные оси, оси полярной системы координат) часто позволяет сделать решение компактным.

В решениях также приходится сочетать геометрические и аналитические методы. Задачи на сложное движение точки часто решаются координатным методом, т. е. без привлечения теорем о сложении скоростей и ускорений.

Многие задачи кинематики, предлагаемые на олимпиадах, являются комплексными. В них сочетаются плоскопараллельное движение твердого тела и сложное движение точки или, например, вращение твердого тела вокруг неподвижной точки и рассмотренные движения его точки как сложного.

К-1 ([1]). Два обруча (рис. 11) одинакового радиуса R катятся без скольжения по направляющим в противоположные стороны. Скорости центров обручей постоянны и равны $V_A = V_1$ и $V_B = V_2$.

Найти ускорение кольца M , надетого на обручи, в зависимости от угла φ .

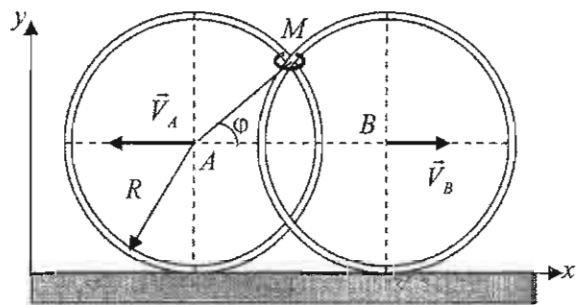


Рис. 11

Решение. Принимая кольцо M за точку, мысленно соединим центр обруча A с точкой M стержнем AM . Для левого обруча точка A является мгновенным центром ускорений ($a_A = \dot{V}_1 = 0$). Тогда ускорение точки M , совпадающей с точкой обруча относительно мгновенного центра ускорений,

$$a_M = a_{MA} = AM \sqrt{\omega_{AM}^4 + \varepsilon_{AM}^2} = R \sqrt{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2}.$$

Поскольку

$$\cos \varphi = \frac{(V_1 + V_2)t}{2R}, \quad -\sin \varphi \dot{\varphi} = \frac{V_1 + V_2}{2R}, \quad (*)$$

то
$$\omega_{AM} = \dot{\varphi} = -\frac{V_1 + V_2}{2R \sin \varphi}. \quad (**)$$

Из (*) и (**) получаем

$$-\cos \varphi \dot{\varphi}^2 - \sin \varphi \ddot{\varphi} = 0, \quad \varepsilon_{AB} = \ddot{\varphi} = -\dot{\varphi}^2 \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}, \quad (***)$$

$$a_M = R \sqrt{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2} = R \dot{\varphi}^2 \sqrt{1 + \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}} = \frac{R \dot{\varphi}^2}{\sin \varphi} = \frac{(V_1 + V_2)^2}{4R \sin^3 \varphi}.$$

Из (***) находим

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} = \operatorname{ctg} \varphi, \quad \mu = 90^\circ - \varphi.$$

Можно решить задачу, записав уравнение движения точки M . Координаты точки M $x_M = R \cos \varphi - V_1 t + C$, $y_M = R + R \sin \varphi$, $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $C = \text{const}$.

Определим проекции ускорения точки M :

$$\ddot{y}_M = -R \sin \varphi \dot{\varphi}^2 + R \cos \varphi \ddot{\varphi}, \quad \ddot{x}_M = 0.$$

Тогда с учетом (*), (**), (***) получаем, что ускорение точки M

$$a_M = \frac{(V_1 + V_2)^2}{4R \sin^3 \varphi}.$$

К-2 (МГТУ, 2001). Угольник ABC движется в плоскости с постоянной угловой скоростью ω так, что его стержни AB и AC , образующие прямой угол, скользят в поворотных муфтах O_1 и O_2 (рис. 12).

Найти точки стержней, ускорения которых перпендикулярны стержням, если $O_1 O_2 = L$, $\angle A O_1 O_2 = \alpha$.

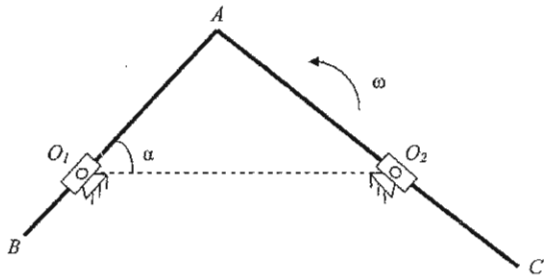


Рис. 12

Решение. МЦС (мгновенный центр скоростей) угольника BAC находится на пересечении перпендикуляров к стержням, проведенных из точек O_1 и O_2 , и, следовательно, четырехугольник O_1AO_2P является прямоугольником, вписанным в окружность радиусом $r=L/2$ (рис. 13).

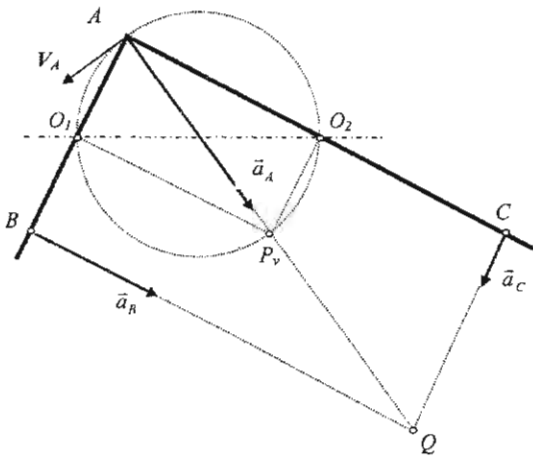


Рис. 13

В плоском движении уголка имеется точка A , расстояние от которой до МЦС $AP=O_1O_2=L=const$. Тогда ускорение $a_A^T = |\epsilon|AP=0$, $a_A^n = a_A^n = V_A^2/r = 2\omega^2 L$.

МЦУ (мгновенный центр ускорений) уголка располагается на прямой AP на расстоянии $AQ = \frac{a_A}{\omega^2} = 2L = 2AP$. Точки B и C ,

ускорения которых перпендикулярны стержням, находятся в основаниях перпендикуляров, опущенных из МЦУ на стержни, причем

$$AB = 2AO_1 = 2L \cos \alpha, \quad AC = 2AO_2 = 2L \sin \alpha.$$

К-3 (МГТУ, 1995). Стержень движется в плоскости так, что его конец A скользит по круговой направляющей радиусом R с постоянной по величине скоростью V (рис. 14).

Определить ускорение точки D касания стержня с выступом в заданном положении.

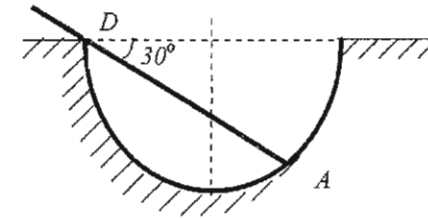


Рис. 14

Решение. Из уравнения связи (рис. 15, а) $B\bar{A} = s = R\alpha$ следует $\dot{\alpha} = 2\dot{\phi} = V/R = const$.

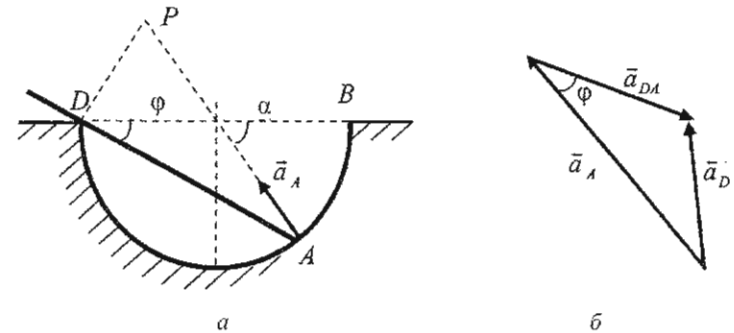


Рис. 15

Таким образом, угловая скорость стержня

$$\omega = \dot{\phi} = V/2R,$$

угловое ускорение

$$\epsilon = \ddot{\phi} = 0, \quad a_A^T = 0, \quad a_A^n = a_A^n = V^2/R.$$

Принимая точку A стержня за полюс, найдем ускорение точки D (рис. 15, б)

$$\bar{a}_D = \bar{a}_A + \bar{a}_{DA}^n + \bar{a}_{DA}^t,$$

где $a_{DA}^t = \varepsilon AD = 0$; $a_{DA}^n = \omega^2 AD = \frac{V^2}{2R} \cos \varphi = a_{DA}$.

Тогда $a_D = \sqrt{a_A^2 + a_{DA}^2 - 2a_A a_{DA} \cos \varphi} = \frac{V^2}{R} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \cos^2 \varphi}$. При

$\varphi = 30^\circ$ ускорение $a_D = \frac{\sqrt{7} V^2}{4 R} = 0,66 \frac{V^2}{R}$.

К-4 (МГТУ, 1995). В равноплечем ($OA = AB = l$) кривошипно-ползунном механизме кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью ω (рис. 16).

Определить относительные скорость и ускорение точки B по отношению к кривошипу.

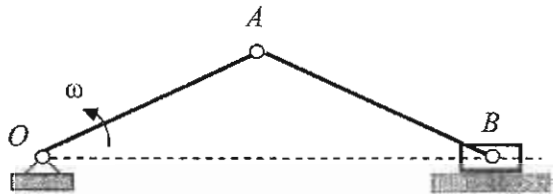


Рис. 16

Решение. Определение скорости, способ 1. Координаты точки B в подвижной, связанной с кривошипом системе отсчета OXY (рис. 17), равны

$$X_B = OA + AB \cos 2\varphi = l(1 + \cos 2\varphi), \quad Y_B = -AB \sin 2\varphi = -l \sin 2\varphi.$$

Тогда проекции и модуль относительной скорости точки B соответственно равны

$$V_{BX}^r = \dot{X}_B = -2l\omega \sin 2\varphi, \quad V_{BY}^r = \dot{Y}_B = -2l\omega \cos 2\varphi, \quad V_B^r = 2l\omega.$$

Относительную скорость можно определить проще. Относительное движение точки B как точки тела AB — по окружности радиусом AB , где $\omega_r = 2\dot{\varphi}$ и $V_B^r = 2l\dot{\varphi}$.

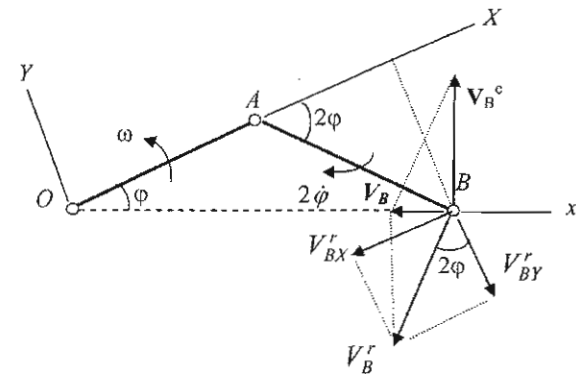


Рис. 17

Направление скорости определим по тангенсу угла наклона вектора \bar{V}_B^r к оси Y , который равен $|V_{BX}^r / V_{BY}^r| = \operatorname{tg} 2\varphi$, и, следовательно, вектор $\bar{V}_B^r \perp AB$.

Определение скорости, способ 2. Абсолютная скорость точки B определена одной проекцией $V_{Bx} = \dot{x}_B = d(2l \cos \varphi) / dt = -2l\omega \sin \varphi$, модуль переносной $V_B^e = \omega OB = 2l\omega \cos \varphi$. Модуль относительной скорости $V_B^r = \sqrt{V_B^2 + (V_B^e)^2} = 2l\omega$, направление вектора определяется по тангенсу угла наклона к вертикали, который равен $|V_{BX}^r / V_{BY}^r| = \operatorname{tg} \varphi$, т. е. опять-таки $\bar{V}_B^r \perp AB$.

Определение скорости, способ 3. В подвижной системе координат $\bar{V}_B^r = \frac{d(\overline{AB})}{dt}$. По правилу дифференцирования вектора постоянного модуля ($|\overline{AB}| = l$) находим

$$\bar{V}_B^r \perp AB \text{ и } V_B^r = l|2\dot{\varphi}| = 2l\omega.$$

Определение ускорения, способ 1 (рис. 18). Проекции и модуль относительного ускорения точки B

$$a_{BX}^r = \dot{V}_{BX}^r = -4l\omega^2 \cos 2\varphi, \quad a_{BY}^r = \dot{V}_{BY}^r = 4l\omega^2 \sin 2\varphi, \quad a_B^r = 4l\omega^2.$$

Находим $\operatorname{tg}(\vec{a}_B^r, OX) = \frac{a_{BY}}{a_{BX}} = \operatorname{tg}2\varphi$ и обнаруживаем, что относительное ускорение точки B направлено по шатуну AB .

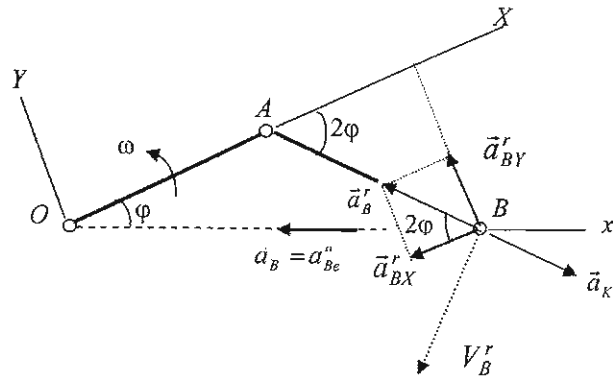


Рис. 18

Определение ускорения, способ 2. По теореме сложения $\vec{a}_B = \vec{a}_B^r + \vec{a}_B^e + \vec{a}_K$, где абсолютное ускорение \vec{a}_B определено одной проекцией $a_{Bx} = \dot{V}_{Bx} = -2l\omega^2 \cos\varphi$, переносное ускорение имеет только одну составляющую, равную $a_{Be}^e = \omega^2 OB = 2l\omega^2 \cos\varphi$ и направленную по прямой OB . Таким образом, $\vec{a}_B = \vec{a}_B^e$ и $\vec{a}_B^r = -\vec{a}_K$.

Определение ускорения, способ 3. По правилу дифференцирования вектора постоянного модуля \vec{V}_B^r находим

$$\vec{a}_B^r \perp \vec{V}_B^r \text{ и } a_B^r = 2l\omega|2\dot{\varphi}| = 4l\omega^2.$$

К-5 ([1]). Диск 1 радиусом R катится без скольжения по плоскости и приводит во вращение вокруг оси, проходящей через точку O , стержень 2 длиной L , который соприкасается с диском в точке A (рис. 19). Скорость точки C равна V_C .

Определить ускорение центра диска, при котором угловое ускорение стержня будет равно нулю в положении, соответствующем углу β .

Решение. Рассматриваем движение точки A_2 стержня как сложное. Неподвижную систему отсчета свяжем с основанием,

подвижную – с катком. Переносным движением для точки A , принадлежащей стержню, является плоское движение катка, относительным – движение по ободу катка, абсолютным – движение по окружности радиусом OA .

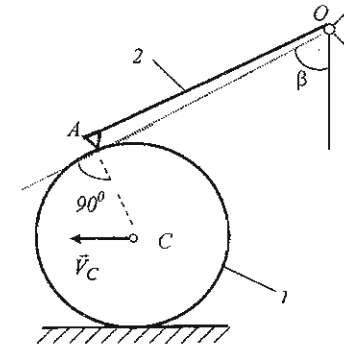


Рис. 19

По теореме о сложении скоростей (рис. 20, а) имеем

$$\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r = \vec{V}_C + \vec{V}_{AC} + \vec{V}_r,$$

где $V = \omega_2 AO$, $V_{AC} = \omega_1 R = V_C$. Проецируя векторное уравнение на ось Ox , получаем $0 = V_{AC} + V_C \sin\beta - V_r$ и находим $V_r = V_C(1 + \sin\beta)$.

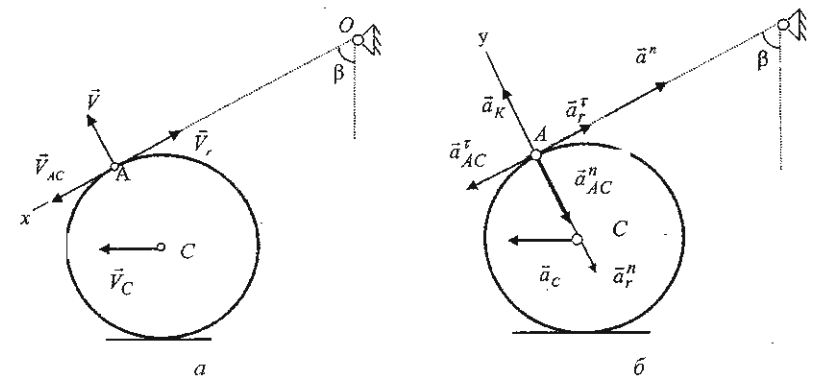


Рис. 20

По теореме сложения ускорений (Кориолиса) (рис. 20, б) имеем

$$\vec{a} = \vec{a}^n + \vec{a}^\tau = \vec{a}_C + \vec{a}_{AC}^n + \vec{a}_{AC}^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_K,$$

где

$$a_{AC}^n = \omega_1^2 R = V_C^2 / R, \quad a_r^n = V_r^2 / R = V_C^2 (1 + \sin \beta)^2 / R;$$

$$a_K = 2\omega_1 V_r = 2V_C^2 (1 + \sin \beta) / R; \quad a^\tau = 0, \text{ так как } \varepsilon_2 = 0.$$

Проецируя векторное уравнение на ось Ay , получаем $0 = a_C \cos \beta - a_{AC}^n - a_r^n + a_K$, откуда находим $a_C = V_C^2 \sin \beta \operatorname{tg} \beta / R$.

К-6 (УГТУ-УПИ). Диск радиусом $R = 0,2$ м движется по горизонтальной плоскости, скорость центра постоянна и равна $V_C = 2$ м/с. К ободу диска шарниром B прикреплен стержень, конец которого скользит по той же плоскости по закону $S_A = 0,5t^2$ м (время измеряется в секундах).

Определить угловое ускорение диска в момент времени $t = 1$ с, которому соответствует изображенное на рис. 21 положение механизма.

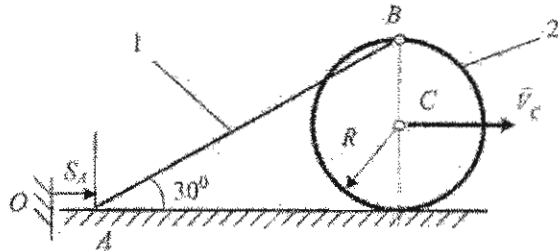


Рис. 21

Решение. Точка B является общей точкой для диска и стержня (рис. 22), причем вектор $\vec{V}_B \parallel \vec{V}_A$, а следовательно, $\vec{V}_B = \vec{V}_A$, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = (V_C - V_A) / R$. Скорость точки A определена одной проекцией, которая при $t = 1$ с равна $V_A^x(1) = \dot{S}_A|_{t=1\text{ с}} = 1,0$ м/с, тогда $\omega_2 = 5$ рад/с.

Ускорение точки B $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau = \vec{a}_C + \vec{a}_{BC}^n + \vec{a}_{BC}^\tau$, где $a_A^x = \ddot{S}_A = 1$ м/с²; $a_{BA}^\tau = \varepsilon_1 AB$; $a_{BA}^n = \omega_1^2 AB = 0$; $a_C = 0$; $a_{BC}^\tau = \varepsilon_2 R$; $a_{BC}^n = \omega_2^2 R = 5,0$ м/с².

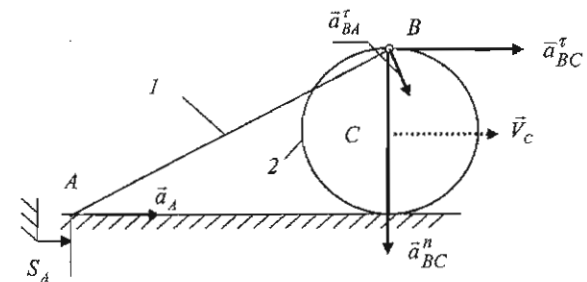


Рис. 22

Проецируя векторы на AB , получим $a_A \cos 30^\circ = \varepsilon_2 R \cos 30^\circ - \omega_2^2 R \sin 30^\circ$, откуда находим

$$\varepsilon_2 = \frac{a_A}{R} + \omega_2^2 \operatorname{tg} 30^\circ = 19,4 \text{ рад/с}^2.$$

К-7 (УГТУ-УПИ). В планетарном механизме шестерня 1 неподвижна, а кривошип OA вращается равномерно с угловой скоростью ω . По шестерне 3 движется точка по закону $S = BM = bRt$ м, $b = \pi/2$ с⁻¹ (рис. 23).

Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M при $t = 1$ с, если радиусы шестерен 1, 2 и 3 $R_1 = R_2 = R_3 = R$.

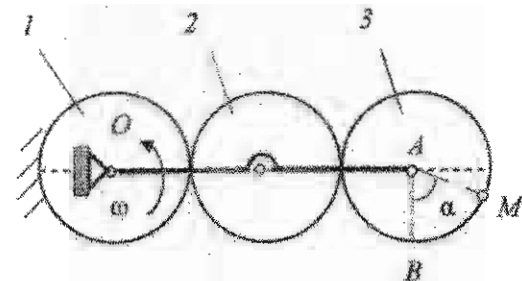


Рис. 23

Решение. Точка M совершает сложное движение: переносным для нее является поступательное движение шестерни 3, относительным – движение по ее ободу.

В момент времени $t=1$ с угол $\alpha = S(1)/R = \pi/2$ рад и точка M находится на правом конце горизонтального диаметра шестерни 3 (рис. 24).

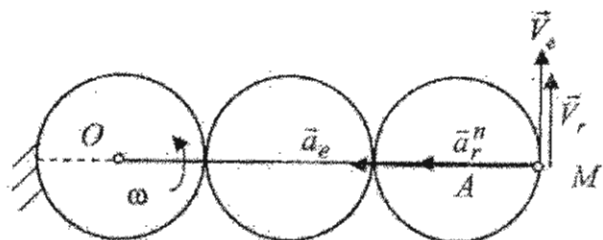


Рис. 24

Абсолютная скорость точки M $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$, где $V_e = V_A = \omega OA = 4\omega R$; $V_r^t = \dot{S} = \pi R/2$. Следовательно, $V = V_A + V_r = R(4\omega + 0,5\pi)$.

По теореме Кориолиса абсолютное ускорение точки M $\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_K$, где $a_K = 0$; $\vec{a}_e = \vec{a}_A$; $a_A = a_A^n = 4\omega^2 R$; $a_r^t = \dot{V}_r^t = 0$; $a_r^n = V_r^2/R = \pi^2 R/4$.

Так как ускорения направлены по одной прямой и в одну сторону, то

$$a = a_r^n + a_A = (\pi^2/4 + 4\omega^2)R.$$

3. ДИНАМИКА

Динамика материальной точки

В динамике материальной точки применяется два вида уравнений, описывающих движение. Динамика точки в инерциальной системе отсчета (ИСО)

$$m\vec{a} = m \frac{d\vec{V}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum \vec{F}_k,$$

где \vec{a} , \vec{V} , \vec{r} – ускорение, скорость и векторная координата точки в ИСО соответственно. Динамика точки в неинерциальной системе

отсчета (НИСО), или динамика относительного движения, описывается динамической теоремой Кориолиса

$$m\vec{a}_r = m \frac{d\vec{V}_r}{dt} = m \frac{d^2\vec{p}}{dt^2} = \sum \vec{F}_k + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_K,$$

где \vec{a}_r , \vec{V}_r , \vec{p} – относительные ускорение, скорость и векторная координата точки в НИСО соответственно; $\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}_e$, $\vec{\Phi}_K = -m\vec{a}_K$ – переносная и кориолисова силы инерции точки соответственно.

В рамках обоих уравнений возможна разная постановка задач динамики. В первой задаче по заданному движению определяются силы, действующие на точку. Во второй задаче по заданным силам и начальным условиям определяется движение точки. В динамике несвободной точки существует смешанная задача, в которой требуется определить как движение точки, так и некоторые силы, действующие на нее (обычно динамические реакции).

Д-1. Груз A массой m опускается по гладкому вертикальному стержню с помощью невесомого нерастяжимого троса, сматываемого с барабана D с постоянной скоростью u . Трос перекинут через блок малых размеров B , отстоящий от стержня на расстоянии l (рис. 25).

Рассчитать силу натяжения троса при $h = l$.

Решение. Здесь требуется решить первую задачу динамики материальной точки в ИСО. Направим по стержню ось x , начало отсчета примем на уровне блока B , направление положительного отсчета – вниз (рис. 26, а).

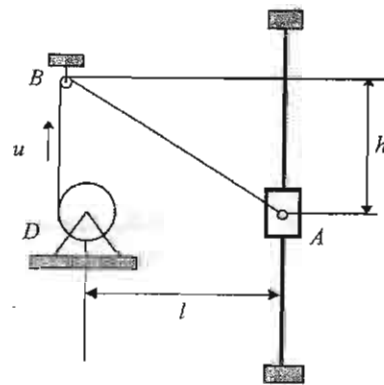


Рис. 25

Векторное уравнение движения груза A $m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{S} + \bar{N}$ в проекции на ось x имеет вид $ma_x = mg - S\sin\varphi$, откуда $S = \frac{m(g - a_x)}{\sin\varphi}$.

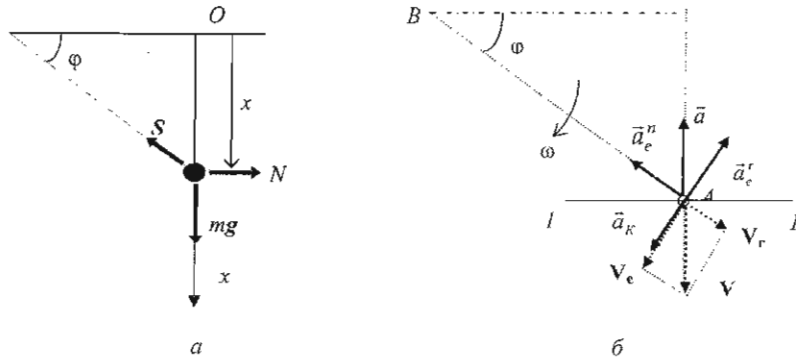


Рис. 26

Проекцию a_x ускорения можно найти разными способами.

Первый способ. Дифференцируя уравнение связи $(AB)^2 = l^2 + x^2$, найдем $AB \frac{d(AB)}{dt} = ABu = x\dot{x}$, откуда получим

$V_x = \dot{x} = u \frac{AB}{x}$. Затем получим проекцию

$$a_x = \frac{u}{x^2} \left(x \frac{d(AB)}{dt} - AB\dot{x} \right) = \frac{u}{x^2} \left(xu - (AB)^2 \frac{u}{x} \right) = -\frac{u^2 l^2}{x^3}.$$

В заданном положении $x = l$, $a_x = -\frac{u^2}{l}$.

Второй способ. Будем рассматривать движение точки A как сложное по отношению к двум системам отсчета: неподвижной, связанной со стержнем, и подвижной, связанной с ветвью AB (рис. 26, б). Абсолютная скорость точки

$$\bar{V} = \bar{V}_e + \bar{V}_r,$$

где $\bar{V} \parallel Ox$; $\bar{V}_e \perp AB$; $\bar{V}_r \parallel AB$; $V_r = u$. Проецируя векторы на прямую $l-l$, найдем $v_e = v_r \operatorname{ctg}\varphi = u \operatorname{ctg}\varphi = \omega_e AB$.

Тогда угловая скорость вращения ветви AB троса в заданном положении при $\varphi = 45^\circ$, $AB = l\sqrt{2}$ равна $\omega_e = u/(l\sqrt{2})$.

Ускорение точки A

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_K,$$

где $a_r = 0$, так как $V_r = u = \operatorname{const}$; $a_e^n = \omega_e^2 AB = \frac{u^2}{l\sqrt{2}}$; $a_K = 2\omega_e V_r = \frac{2u^2}{l\sqrt{2}} = \frac{u^2\sqrt{2}}{l}$.

Проецируя ускорения на прямую AB , получим $a = a_e^n \sqrt{2} = u^2/l$, $a_x = -a$.

Этот результат совпадает с найденным выше.

Д-2. Два тела одинаковой массы m движутся под действием сил тяжести и сил сопротивления среды, пропорциональных их скорости ($\bar{R} = -\mu\bar{v}$), коэффициент сопротивления $\mu = \operatorname{const} > 0$. Превышение по высоте одного тела над другим составляет H .

Полагая высоту падения неограниченной, определить, какому условию должны удовлетворять начальные значения V_{10} и V_{20} вертикальных скоростей для того, чтобы произошло сближение тел в их свободном падении.

Решение. Это вторая задача динамики свободной точки в ИСО. В проекциях на ось x , направленную по вертикали вниз, дифференциальные уравнения движения тел имеют вид

$$m \frac{dV_{1x}}{dt} = mg - \mu V_{1x}, \quad m \frac{dV_{2x}}{dt} = mg - \mu V_{2x}.$$

Обозначим $\mu/m = n$ и запишем уравнения в дифференциалах:

$$dV_{1x} = gdt - ndx_1, \quad dV_{2x} = gdt - ndx_2.$$

Интегрируя при начальных условиях: $t=0$ $x_1 = H$, $V_{1x} = V_{10}$, $x_2 = 0$, $V_{2x} = V_{20}$, получим

$$V_{1x} - V_{10} = gt - n(x_1 - H), \quad V_{2x} - V_{20} = gt - nx_2.$$

Вычитая из первого уравнения второе, найдем $V_{20} - V_{10} = nH + n(x_2 - x_1) + (V_{2x} - V_{1x})$.

В момент сближения разность $x_2 - x_1 = 0$ и $V_{2x} - V_{1x} \geq 0$, и, следовательно, искомое условие есть

$$V_{20} - V_{10} \geq \frac{\mu}{m} H.$$

Д-3. Кольцу, надетому на проволочную горизонтальную окружность радиусом R , сообщили скорость V_0 . Коэффициент трения кольца о проволоку равен f (рис. 27, а).

Определить путь, пройденный кольцом до остановки.

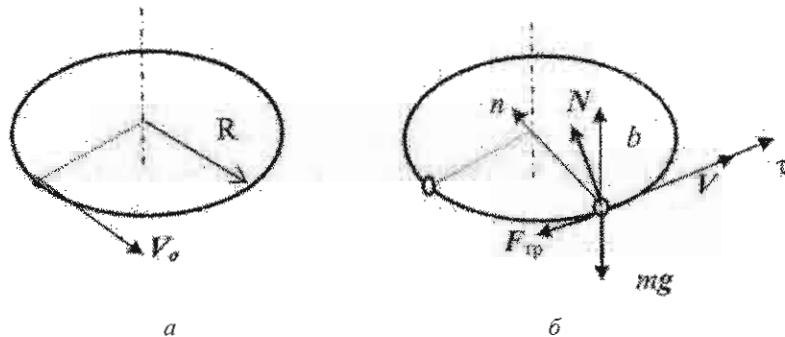


Рис. 27

Решение. Это вторая задача динамики несвободной точки в ИСО. В проекциях на естественные оси дифференциальные уравнения движения кольца имеют вид (рис. 27, б)

$$m \frac{dV_\tau}{dt} = -F_{\text{тр}}, \quad m \frac{V^2}{R} = N_n, \quad 0 = N_b - mg,$$

где $F_{\text{тр}} = f N = f \sqrt{N_n^2 + N_b^2}$.

Исключая неизвестные и используя замену переменной $\frac{dV_\tau}{dt} = V_\tau \frac{dV_\tau}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d(V^2)}{ds}$, где s — дуговая координата, дифференциальное уравнение движения кольца приведем к виду

$$m V_\tau \frac{dV_\tau}{ds} = -f \sqrt{\left(m \frac{V^2}{R}\right)^2 + (mg)^2}.$$

Разделяя переменные, получим

$$-\frac{2f}{R} ds = \frac{d(V^2)}{\sqrt{(gR)^2 + (V^2)^2}} = \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}},$$

где $z = \frac{V^2}{gR}$.

Интегрируя в пределах изменения координаты s от 0 до S и координаты z от $\frac{V_0^2}{gR}$ до 0, найдем

$$S = \frac{R}{2f} \ln \left[\frac{V_0^2}{gR} + \sqrt{1 + \left(\frac{V_0^2}{gR}\right)^2} \right].$$

Д-4 (МГТУ, 2002). Материальная точка массой m приводится в движение по гладкой горизонтальной плоскости гладкой лопаткой, выполненной в виде четверти окружности радиусом R . Лопатка вращается вокруг вертикальной оси O с постоянной угловой скоростью ω (рис. 28, а).

Какую скорость относительно лопатки будет иметь точка в момент отделения от лопатки? Принять, что движение точки началось из положения O с ничтожно малой начальной скоростью.

Решение. Данная задача относится к задачам по динамике относительного движения (в ИСО) несвободной материальной точки. Определим положение точки дуговой координатой $s = OM = R\varphi$. Векторное уравнение движения точки спроецируем на касательную и главную нормаль к относительной траектории (рис. 28, б; силы, перпендикулярные плоскости чертежа, на рисунке не показаны):

$$m \frac{dV_r}{dt} = \Phi_e^n \cos(\varphi/2), \quad m \frac{V_r^2}{R} = \Phi_K - \Phi_e^n \sin(\varphi/2) - N,$$

где $\Phi_e^n = 2m\omega^2 R \sin(\varphi/2)$; $\Phi_K = 2m\omega V_r$.

Начальные условия: при $t = 0$ $\varphi = 0$, $V_r = 0$.

Первое уравнение системы после замены переменной $dV_r/dt = V_r dV_r/Rd\varphi$ приводится к виду

$$V_r dV_r = \omega^2 R^2 \sin \varphi d\varphi.$$

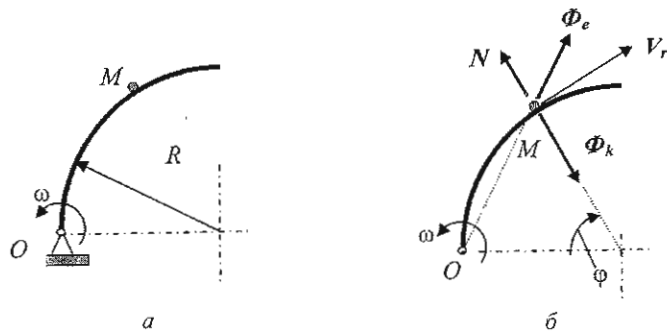


Рис. 28

После интегрирования получим $V_r^2/2 = \omega^2 R^2 (1 - \cos \varphi) = 2\omega^2 R^2 \sin^2(\varphi/2)$, откуда следует зависимость модуля относительной скорости от координаты

$$V_r = 2\omega R |\sin(\varphi/2)|.$$

Из второго уравнения системы определяем

$$N = \Phi_k - \Phi_e^n \sin(\varphi/2) - mV_r^2/R = 2m\omega^2 R \sin(\varphi/2)(2 - 3\sin(\varphi/2)).$$

Условие $N=0$ отделения точки от лопатки выполняется при $\varphi^* = 2\arcsin(2/3) = 1,46$ рад ($83,6^\circ$). Относительная скорость точки в этом положении $V_r(\varphi^*) = (4/3)\omega R$.

Динамика механической системы

При решении задач по динамике системы необходимо сначала выбрать механическую систему или тело, движение которых рассматривается. Если не надо определять все реакции связей (внутренние и внешние), то механическую систему выбирают так, чтобы неизвестные силы были внутренними. Затем нужно определить число степеней свободы и выбрать параметры, однозначно определяющие положение системы.

Для определения реакций связей или законов движения тел системы удобно использовать даже для систем с несколькими степенями свободы общие теоремы динамики.

Если при этом проекция внешних сил на какую-либо ось равна нулю, например $\sum_{k=1}^N F_{kx} = 0$, то удобно использовать следствие из

теоремы об изменении количества движения механической системы. Если главный момент внешних сил относительно какой-либо оси равен нулю, например $\sum_{k=1}^N M_x(\vec{F}_k) = 0$, то можно для опреде-

ления угловых скоростей тел или скоростей точек тела применить закон сохранения кинетического момента механической системы относительно данной оси.

Для определения законов движения тел и реакций связей, наложенных на систему, удобно использовать уравнения движения твердых тел: поступательного, вращательного или плоского.

Если механическая система, на которую наложены идеальные связи, имеет несколько степеней свободы, то для определения ускорений (угловых или линейных) тел, входящих в систему, хорошо использовать уравнение Лагранжа второго рода.

Д-5 (МГТУ, 2001). Однородный Г-образный стержень движется, опираясь на гладкую опору A и концом B на шероховатую плоскость (рис. 29). Расстояние от центра масс до вертикального колена стержня равно L , высота вертикального колена составляет h , коэффициент трения скольжения в точке контакта с плоскостью — f ($f < L/h$).

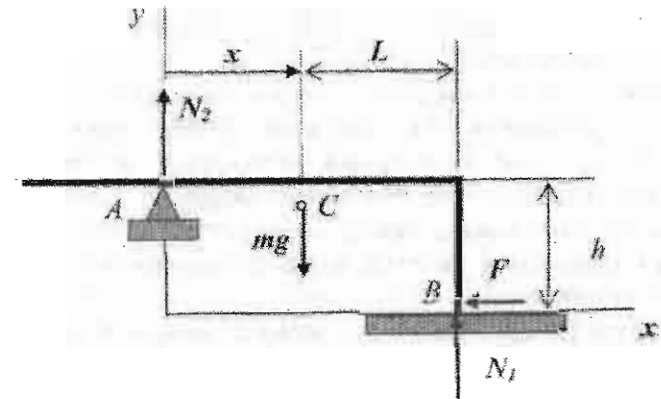


Рис. 29

Определить скорость стержня в функции координаты x , если начальные значения координаты и скорости центра масс стержня составляют x_0 и V_0 .

Решение. Прямолинейное поступательное движение стержня описывается одним дифференциальным уравнением $m\ddot{x} = -F$, где $F = F_{\max} = f N_1$.

Кроме того, имеем два условия равновесия для сил:

$$\sum F_{ky} = N_1 + N_2 - mg = 0 \text{ и } \sum M_C = N_1 L - f N_1 h - N_2 x = 0,$$

откуда, исключая N_2 , найдем $N_1 = mg \frac{x}{x + \delta}$, где $\delta = L - fh > 0$.

Дифференциальное уравнение движения стержня приводится к виду

$$\ddot{x} = V_x \frac{dV_x}{dx} = -fg \frac{x}{x + \delta}$$

и имеет общее решение $V^2 = -2fg[x - \delta \ln(x + \delta)] + C$, в котором константа интегрирования в соответствии с начальными условиями $x = x_0$ и $V_x = V_0$ равна $C = V_0^2 + 2fg[x_0 - \delta \ln(x_0 + \delta)]$. Тогда

$$V = \sqrt{V_0^2 + 2fg \left(x_0 - x + \delta \ln \frac{x + \delta}{x_0 + \delta} \right)}.$$

Д-6 (МГТУ, 2001). Однородный цилиндр I массой m и радиусом R катится без скольжения по плите 2 массой M , находящейся на гладкой горизонтальной плоскости. Ось C цилиндра скользит в пазах вилки 3 , ось A вращения которой закреплена на плите на расстоянии l от опорной плоскости катка. Вилка связана с плитой спиральной пружиной 4 , имеющей жесткость c ; пружина не напряжена при вертикальном положении вилки. В начальный момент система находилась в покое, затем вилку отклонили от вертикального положения на угол φ_0 и отпустили без начальной скорости (рис. 30).

Определить угловое ускорение вилки и ускорение плиты в начальный момент, а также скорость плиты в момент, когда вилка займет вертикальное положение. Массой вилки пренебречь, принять $M = 3m$, $R = 3l$, $\varphi_0 = \pi/6$ рад.

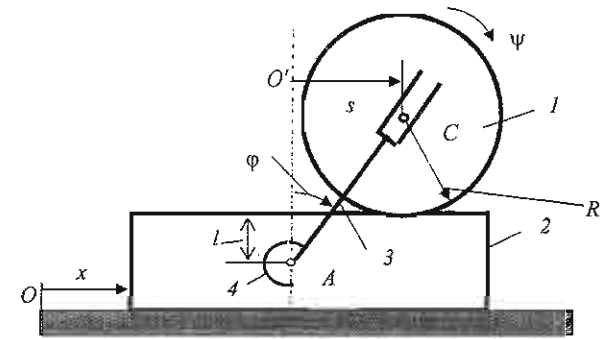


Рис. 30

Решение. Данная система имеет две степени свободы: четыре координаты s , x , φ и ψ связаны двумя уравнениями связи $s = (R + l) \operatorname{tg} \varphi = R\psi$. В качестве независимых (обобщенных) координат примем координаты x и s . Из уравнений связи имеем следующие кинематические соотношения:

$$\dot{\psi} = \frac{\dot{s}}{R}, \quad \dot{s} = \frac{R+l}{\cos^2 \varphi} \dot{\varphi} \text{ и } \ddot{s} = \frac{(R+l)(\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}^2 \operatorname{tg} \varphi)}{\cos^2 \varphi}.$$

Первый способ решения – с помощью общих теорем динамики. Внешние для системы силы: силы тяжести катка I и плиты 2 , а также нормальная реакция гладкой опорной плоскости – не имеют проекций на ось x , и, следовательно, действует закон сохранения проекции количества движения

$$Q_x = MV_x + mV_{Cx} = M\dot{x} + m(\dot{s} + \dot{x}) = Q_x(0).$$

При начальных условиях $V_x(0) = V_{Cx}(0) = 0$, $Q_x(0) = 0$, и тогда

$$(M + m)\dot{x} = -m\dot{s}, \text{ или } \dot{x} = -k\dot{s}, \quad (*)$$

где $k = m/(M + m) = 1/4$.

Работа внешних сил системы равна нулю, из внутренних сил работу совершают только силы упругости спиральной пружины, которые являются потенциальными. Таким образом, действует закон сохранения механической энергии системы, имеющий вид: в интегральной форме – $T - T_0 = \Pi_0 - \Pi$, а в дифференциальной – $d(T + \Pi)/dt = 0$.

Кинетическая энергия системы

$$T = (M\dot{x}^2 + mV_C^2 + I_C\dot{\psi}^2)/2 = (M+m)\dot{x}^2/2 + m\dot{x}\dot{s} + 3m\dot{s}^2/4$$

с учетом уравнения (*) принимает вид

$$T = \frac{1}{2} \left(-\frac{m}{M+m} + \frac{3}{2} \right) m\dot{s}^2 = a\dot{s}^2/2 = A\dot{x}^2/2,$$

где $a = (3/2 - k)m = 5m/4$; $A = a/k^2$.

Потенциальная энергия $\Pi = \frac{c\varphi^2}{2}$. Тогда

$$d(T + \Pi)/dt = a\dot{s}\ddot{s} + c\varphi\dot{\varphi} = \dot{\varphi} \left[a \frac{(R+l)^2}{\cos^4\varphi} (\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}^2 \operatorname{tg}\varphi) + c\varphi \right] = 0. (**)$$

В начальном положении системы $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$, $\ddot{\varphi}(0) = \varepsilon_z(0)$. Начальное значение проекции углового ускорения вилки находим из (**):

$$\varepsilon_z(0) = -\frac{c\varphi_0 \cos^4\varphi_0}{a(R+l)^2} = -\frac{27\pi}{640} \frac{c}{mR^2}.$$

$$\text{Тогда } \ddot{s}(0) = \frac{R+l}{\cos^2\varphi_0} \ddot{\varphi}(0) = \frac{16}{9} R\varepsilon_z(0) = -\frac{3\pi}{40} \frac{c}{mR}, \quad a_x(0) = \ddot{x}(0) =$$

$$= -k\ddot{s}(0) = \frac{3\pi}{160} \frac{c}{mR}.$$

Учитывая, что $T_0 = 0$, $\Pi_0 = c\varphi_0^2/2$, $\Pi|_{\varphi=0} = 0$, $T|_{\varphi=0} = AV_2^2/2$,

найдем значение скорости плиты $V_2 = \dot{x}|_{\varphi=0} = \varphi_0 \sqrt{c/A} = \frac{\pi}{12} \sqrt{c/(5m)}$.

Второй способ. Связи системы – идеальные, и можно применить уравнение Лагранжа второго рода. Вычислим производные кинетической энергии $T = (M+m)\dot{x}^2/2 + m\dot{x}\dot{s} + 3m\dot{s}^2/4$:

$$\frac{d}{dt}(\partial T/\partial \dot{x}) = (M+m)\ddot{x} + m\ddot{s}, \quad \frac{d}{dt}(\partial T/\partial \dot{s}) = m\dot{x} + 3m\ddot{s}/2,$$

$$\partial T/\partial x = \partial T/\partial s = 0.$$

Найдем обобщенные потенциальные силы:

$$Q_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0, \quad Q_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial s} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial s} = -c\varphi \frac{\cos^2\varphi}{R+l}.$$

Получим уравнения $(M+m)\ddot{x} + m\ddot{s} = 0$ и $m\left(\ddot{x} + \frac{3\ddot{s}}{2}\right) = -\frac{c\varphi \cos^2\varphi}{R+l}$.

Первое из них выражает представленный выше закон сохранения проекции количества движения $\dot{x} = -k\dot{s}$, второе уравнение с помощью первого приводится к виду

$$\left(\frac{3}{2} - k\right) m\ddot{s} = a\ddot{s} = -\frac{c\varphi \cos^2\varphi}{R+l} = -\frac{c\varphi\dot{\varphi}}{\dot{s}}.$$

Оно выражает также представленный выше закон сохранения механической энергии в дифференциальной форме.

Д-7 (МГТУ, 2001). Однородная идеально гибкая цепь длиной $L = L_1 + L_2$ лежит на шероховатой поверхности стола так, что участок цепи длиной L_1 свешивается с края стола. Коэффициент трения цепи о стол равен f (рис. 31, а).

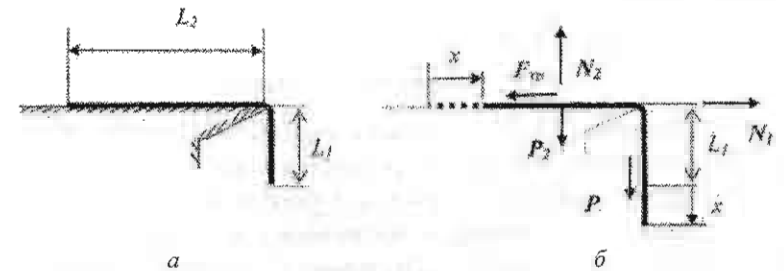


Рис. 31

Какому условию должны удовлетворять длины L_1 и L_2 , чтобы цепь пришла в движение из состояния покоя? Полагая, что условие равновесия не выполняется, определить скорость цепи в момент, когда правый конец опустится на величину H ($H < L_2$). Размером звеньев и трением в шарнирах цепи пренебречь, движение участков цепи считать поступательным и прямолинейным.

Решение. Определим положение цепи координатой x левого конца (рис. 31, б). Из принципа возможных перемещений следует $P_1 - F_{\text{тр}} = 0$ и $N_2 = P_2$.

Цепь будет находиться в покое, если выполняется условие не-проскальзывания $F_{\text{тр}} < F_{\text{тр}}^{\text{max}} = f N_2$, или $P_1 < f P_2$, откуда находим $L_2 > L_1/f$.

Обозначим как $\rho = m/(L_1 + L_2)$ погонную массу (массу единицы длины) цепи.

По теореме об изменении кинетической энергии $T - T_0 = \sum A_k$ цепи имеем

$$T = \rho(L_1 + L_2)V^2/2, T_0 = 0,$$

где $V = V(x)$ – скорость, приобретенная цепью; $A = A(x)$ – работа, совершаемая силами тяжести и трения. Она равна

$$\begin{aligned} \sum A_k &= \int_0^H \rho g(L_1 + x)dx - \int_0^H f \rho g(L_2 - x)dx = \\ &= \rho g H \left\{ \left(L_1 + \frac{H}{2} \right) - f \left(L_2 - \frac{H}{2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда находим скорость

$$V^2 = \frac{gH\{2L_1 + H - f(2L_2 - H)\}}{L_1 + L_2}.$$

Д-8. В механизме зубчатая рейка 1 массой M находится в зацеплении с шестерней 2 массой m и радиусом r (рис. 32). К шестерне вдоль ее радиуса приварен стержень 3 массой m_1 и длиной $2l$. К рейке 1 прикреплены пружина 4 жесткости c и демпфер 5, имеющий коэффициент вязкости μ . Шестерню и стержень считать однородными телами; пружина линейна, сила сопротивления демпфера пропорциональна скорости рейки.

В положении, указанном на рисунке, система находится в покое, перпендикулярно стержню в центре масс его приложен ударный импульс \vec{S} .

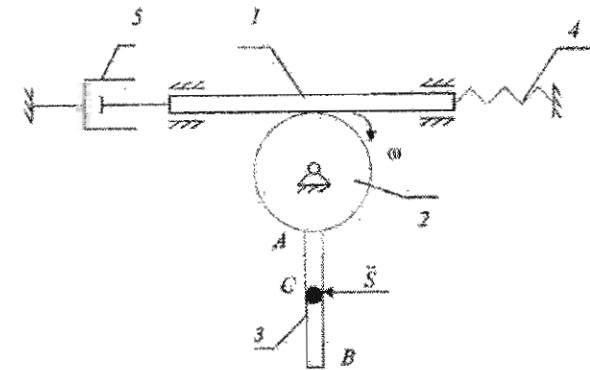


Рис. 32

Определить максимальное отклонение рейки от положения покоя для линеаризованного уравнения движения. При ударе величины c и μ остаются постоянными. Принять $l = 2r$, $M = 2m$, $m_1 = 1,5m$, $c = 13,5 \frac{mg}{r}$, $\mu = 36m \sqrt{\frac{g}{r}}$.

Решение.

1. Удар. Используем для системы (рис. 33) общее уравнение динамики:

$$M\delta x + I_{O_z}\omega\delta\varphi - S\delta r_C = 0, u = \omega r, I_{O_z} = I_{O_z2} + I_{O_z3},$$

где u , ω – скорость рейки и угловая скорость тел 2, 3 после удара;

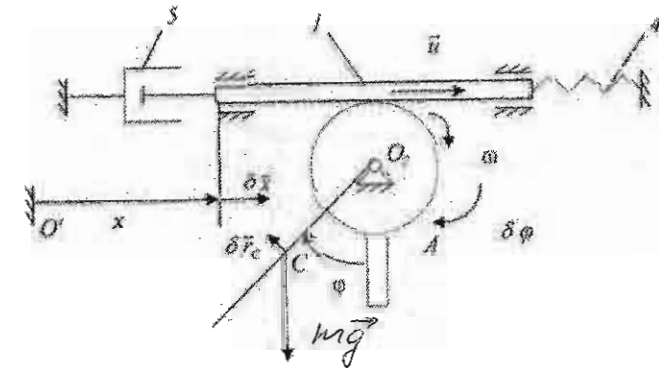


Рис. 33

$$\delta r_C = (r+l)\delta\varphi; \quad \delta x = r\delta\varphi; \quad I_{Oz} = \frac{mr^2}{2} + \frac{m_1 4l^2}{12} + m_1(l+r)^2 = 16mr^2;$$

$$\left(M + \frac{I_{Oz}}{r^2}\right)u = \frac{S(r+l)}{r}; \quad 18mu = 3S; \quad u = \frac{S}{6m}.$$

2. Движение после удара. Начальные условия движения: при $t=0$ $x=0$ и $\dot{x}=u$.

Применим уравнение Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x,$$

где $T = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{I_{Oz}\omega^2}{2} = \frac{\dot{x}^2}{2} \left(M + \frac{I_{Oz}}{r^2} \right) = 9m\dot{x}^2; \quad \dot{x} = r\dot{\varphi}; \quad v_x = \dot{x} = r\omega;$
 $\omega = \dot{\varphi}.$

Вычисляем $\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}, \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right), Q_x:$

$$18m\ddot{x} = -\mu\dot{x} - cx - m_1 g \frac{(l+r)}{r} \sin\varphi, \quad \text{где } \sin\varphi \approx \varphi = \frac{x}{r};$$

$$18m\ddot{x} + \mu\dot{x} + [c + m_1 g(l+r)/r^2]x = 0, \quad \ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0;$$

$$c_1 = c + \frac{m_1 g(l+r)}{r^2} = 18m \frac{g}{r}, \quad a = 18m, \quad k = \sqrt{\frac{c_1}{a}} = \sqrt{\frac{g}{r}},$$

$$n = \frac{\mu}{2a} = \sqrt{\frac{g}{r}},$$

получаем, что $k=n$, поэтому решение имеет вид $x = (C_1 + C_2 t) \exp(-nt).$

Определим постоянные

$$\dot{x} = -n(C_1 + C_2 t) \exp(-nt) + C_2 \exp(-nt),$$

$$C_1 = 0, \quad C_2 = u,$$

$$x = (ut) \exp(-nt).$$

Определим x_{\max} : $\dot{x} = u(1-nt) \exp(-nt) = 0$, откуда $t_1 = 1/n$.

Таким образом $x_{\max} = x|_{t_1} = \frac{u}{n} \exp(-1) = \frac{S}{6m} \sqrt{\frac{r}{g}} \exp(-1) = S \sqrt{\frac{r}{g}} / (16,3m).$

Задачи по теории ньютоновского удара

Задачи ньютоновского удара являются весьма содержательными и хорошо отражают физическую сущность механики. Такие задачи рассматривались в работах [2-4].

Кроме того, при малых относительных скоростях соударений тел при абсолютно неупругом ударе приближенная теория удара дает неплохие результаты в сравнении с практикой для стесненного удара без учета трения.

Удар тел может быть вызван действием ударного импульса или мгновенным наложением или снятием связей (например, столкновение тела с неподвижным телом). За время удара скорости точек тела изменяются на конечную величину, а в опорах возникают импульсы ударных сил реакций. Определение импульсов ударных сил реакций, скоростей точек тел после удара необходимо для исследования дальнейшего движения тела или системы тел, для определения прочности элементов конструкций.

В качестве модели удара выбрана модель Гюйгенса-Ньютона, в которой интегрально учитываются потери энергии при появлении местных упругопластических деформаций.

При этом связи в механической системе при ударе можно классифицировать следующим образом:

- 1) связи, существующие до удара, во время и после него;
- 2) связи, не существующие до удара и возникающие во время удара и сохраняющиеся после удара;
- 3) связи, существующие до удара, сохраняющиеся во время удара и не сохраняющиеся после удара;
- 4) связи, существующие только во время удара, но не сохраняющиеся после него.

Первые два типа связей можно назвать сохраняющимися, а остальные два – несохраняющимися.

Для определения скоростей точек тел после удара применяют общие теоремы динамики при ударе.

Теорема об изменении количества движения системы при ударе имеет вид

$$\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \sum_{k=1}^N \bar{S}_k^e \quad \text{или} \quad M(\bar{u}_C - \bar{v}_C) = \sum_{k=1}^N \bar{S}_k^e,$$

где M – масса системы материальных точек; \bar{Q}_0, \bar{Q} – количество движения механической системы соответственно до и после удара; \bar{u}_C, \bar{v}_C – скорости центра масс после и до удара соответственно;

$\sum_{k=1}^N \bar{S}_k^e$ – главный вектор импульсов внешних ударных сил.

При непоступательном движении тел используют теорему об изменении главного момента количеств движения системы при ударе:

$$\bar{K}_0 - \bar{K}_0^{(0)} = \sum_{k=1}^N \bar{M}_0(\bar{S}_k^e),$$

где $\bar{K}_0, \bar{K}_0^{(0)}$ – главные моменты количеств движения системы после и до удара соответственно; $\sum_{k=1}^N \bar{M}_0(\bar{S}_k^e)$ – главный момент внешних ударных импульсов.

Для определения скоростей тел после удара для систем с идеальными связями удобно применять **общее уравнение механики при ударе**:

$$\sum_{k=1}^N (\bar{S}_k^{(a)} - m_k \Delta \bar{v}_k) \delta \bar{r}_k = 0,$$

где $\bar{S}_k^{(a)}$ – ударный активный импульс, примененный в точке M_k ; $\Delta \bar{v}_k = \bar{u}_k - \bar{v}_k$ – изменение скорости точки M_k при ударе.

Для механических систем из N точек, на которые наложены голономные связи до и после удара, можно применять уравнение Лагранжа второго рода:

$$\Delta \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = S_i \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

где T – кинетическая энергия механической системы; S_i – обобщенный ударный импульс, соответствующий обобщенной координате q_i ; n – число степеней свободы механической системы.

При этом обобщенные ударные импульсы можно находить так же, как обобщенные силы, вычисляя элементарную «работу» ударных импульсов на возможных перемещениях системы и определяя в полученном выражении коэффициенты при вариациях соответствующих координат.

При связях, наложенных на систему и не меняющихся при ударе, возможные перемещения определяются обычным способом. Если при ударе возникают новые связи, то удобно выбирать возможные перемещения для системы с наложенными идеальными связями.

Особое значение при изучении удара имеет определение центра удара, так как при приложении в этой точке ударного импульса в опорах не возникают ударные реакции.

Определение скоростей точек тел после удара необходимо для исследования дальнейшего «послеударного» движения системы. Такие задачи также рассмотрены в данной работе.

Д-9. В механической системе рейка массой M находится в зацеплении с шестерней 2 (рис. 34). К рейке 1 прикреплена пружина, имеющая жесткость c . Пружина не деформирована в начальном положении системы. К рейке 1 приложен ударный импульс S , момент инерции шестерни 2 относительно оси вращения равен I . Определить амплитуду колебаний рейки 1 после удара.

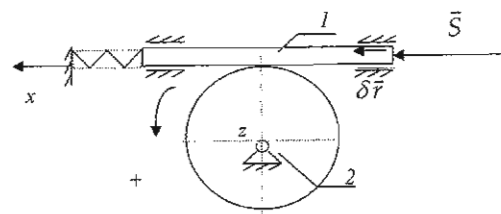


Рис. 34

Решение. При ударе не учитываем действие силы упругости пружины. Используем общее уравнение механики для удара, чтобы определить скорость рейки после удара:

$$M u_x \delta r + I \omega_z \delta \varphi = S \delta r,$$

где возможные перемещения рейки и шестерни связаны соотношением $\delta r = R \delta \varphi$.

При выбранных направлении оси x и положительном отсчете угловой скорости имеем $u_x = R\omega_z$, где u_x , ω_z – проекции скорости рейки и угловой скорости шестерни после удара.

$$\text{Скорости } u_x = \frac{SR^2}{MR^2 + I}, \quad \omega_z = \frac{SR}{MR^2 + I}.$$

Решение для удара дает начальные условия для дальнейшего движения системы. Составим уравнение свободных колебаний системы. Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{I\dot{\phi}^2}{2}, \quad \text{где } \dot{x} = R\dot{\phi}.$$

Окончательно $T = \frac{\dot{x}^2}{2} \left(M + \frac{I}{R^2} \right)$, обобщенная сила $Q_x = -\frac{cx\delta x}{\delta x} = -cx$.

Уравнение колебаний имеет вид

$$\left(M + \frac{I}{R^2} \right) \ddot{x} + cx = 0.$$

Частота свободных колебаний

$$k = \sqrt{\frac{cR^2}{MR^2 + I}}.$$

Решение для свободных колебаний $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ при начальных условиях $t = 0$ $x = 0$, $\dot{x} = u_x$ имеет вид

$$x = \frac{u_x}{k} \sin kt \quad \text{и} \quad A = \frac{u_x}{k}.$$

Замечание. Скорость рейки после удара можно определить из общих теорем динамики при ударе.

Используем теорему об изменении количества движения для рейки (рис. 35) и теорему об изменении главного момента количества движения материальных точек системы для шестерни (рис. 36):

$$Mu_x = S + S_x;$$

$$I_z \omega_z = -S_x R;$$

$$Mu_x = S - \frac{I_z \omega_z}{R};$$

$$Mu_x R + I_z \omega_z = SR, \quad u_x = \omega_z R;$$

$$u_x = \frac{SR^2}{MR^2 + I}.$$

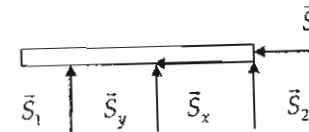


Рис. 35

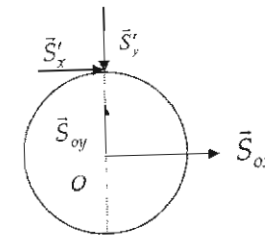


Рис. 36

Д-10. По стержню массой m , который имеет ось вращения Oz , произошел удар импульса \vec{S} (рис. 37). Найти импульс ударной реакции в шарнире O . Заданы величины l , α , L_1 , длина стержня L , его момент инерции относительно оси Oz равен I . Стержень l массой не обладает.

Решение. Используем теорему об изменении кинетического момента относительно оси Oz :

$$K_z - K_z^{(0)} = \sum_k M_z(\vec{S}_k^{(e)}),$$

где $K_z^{(0)} = 0$, если стержень до удара покоился. Из теоремы

$$I_z \omega_z = S \cos \alpha L_1 + S \sin \alpha l = S(L_1 \cos \alpha + l \sin \alpha).$$

Из теоремы об изменении количества движения при ударе имеем

$$mu_{Cx} = S \cos \alpha + S_x, \quad mu_{Cy} = 0 = -S \sin \alpha + S_y.$$

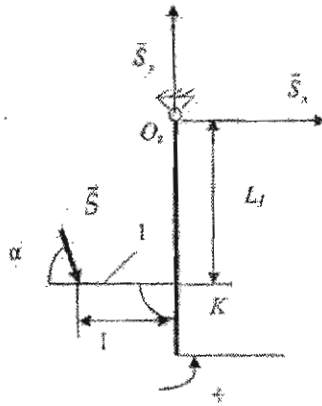


Рис. 37

Кроме того, $u_{Cx} = \frac{L}{2} \omega_z$, если стержень однородный, где u_{Cx} , u_{Cy} , ω_z — проекции скорости центра масс и угловая скорость стержня соответственно. Имеем

$$\omega_z = \frac{S}{I} (L_1 \cos \alpha + l \sin \alpha), \quad S_y = S \sin \alpha,$$

$$S_x = m u_{Cx} - S \cos \alpha = m \frac{L S}{2 I} (L_1 \cos \alpha + l \sin \alpha) - S \cos \alpha = S \left(\frac{m L L_1}{2 I} \cos \alpha + \frac{m L l}{2 I} \sin \alpha - \cos \alpha \right).$$

Поставим задачу об определении центра удара. Для этого положим $S_x = S_y = 0$, тогда должны быть верны равенства $\alpha = 0$, $\frac{m L L_1}{2 I} = 1$.

Если стержень однородный, то $I = \frac{m L^2}{3}$, $L_1 = \frac{2}{3} L$.

Д-11. Точка массой m ударяется со скоростью v в точке K об однородный стержень массой M и длиной l , удар считается абсолютно неупругим (рис. 38). Определить скорость точки после удара, если $OK = l_1$.

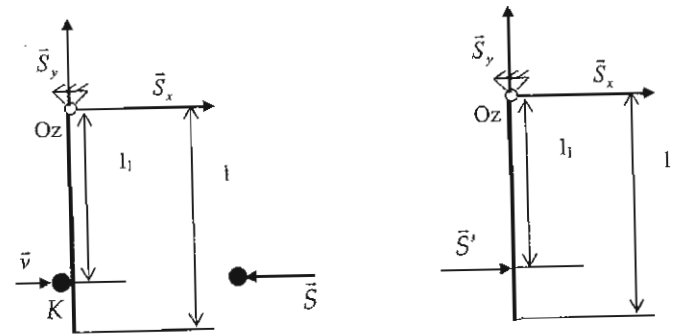


Рис. 38

Решение. Определим скорость точки после удара. Из общего уравнения механики имеем:

$$m(\bar{u} - \bar{v}) \delta \bar{r} + I_z \omega_z \delta \varphi = 0,$$

$$\delta r = l_1 \delta \varphi,$$

$$m(u_x - v) l_1 + \frac{I_z u_x}{l_1} = 0,$$

$$u_x = \omega_z l_1,$$

$$I_z = \frac{M l^2}{3}, \quad u_x = \frac{m v l_1}{m l_1 + I_z / l_1} = \frac{m v l_1^2}{m l_1^2 + M l^2 / 3}.$$

Из общих теорем динамики имеем

$$m(u_x - v) = -S, \quad I_z \omega_z = S l_1,$$

$$m(u_x - v) = -\frac{I_z \omega_z}{l_1},$$

$$m(u_x - v) l_1 + I_z \omega_z = 0, \quad m(u_x - v) l_1 + \frac{I_z}{l_1} u_x = 0.$$

В результате получаем скорость

$$u_x = \frac{m v l_1^2}{m l_1^2 + M l^2 / 3}.$$

Д-12. В механизме толкателю 1 (рис. 39, а) массой m сообщена скорость \vec{V} . В соединении толкателя 1 и кулисы 2 имеется зазор (рис. 39, а). Определить угловую скорость кулисы после закрытия зазора. Момент инерции кулисы относительно оси ее вращения равен I , угол α и высота H заданы.

Решение. Используем для системы, состоящей из толкателя и кулисы, общее уравнение механики для удара (рис. 39, б)

$$M(\vec{u} - \vec{V})\delta\vec{r} + I_z\omega_z\delta\varphi = 0.$$

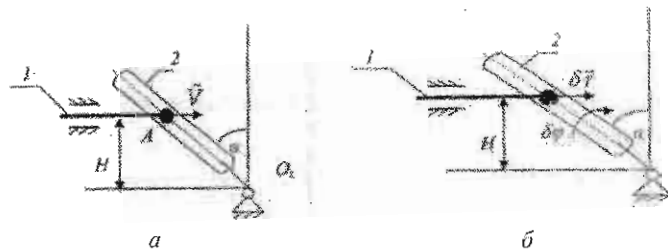


Рис. 39

Точка A совершает сложное движение: абсолютное движение ее – прямолинейное вместе с толкателем, относительное направлено вдоль кулисы, переносное – вращение кулисы вокруг оси Oz .

Тогда по теореме о сложении скоростей для скорости точки A после удара имеем

$$\vec{u} = \vec{u}_e + \vec{u}_r.$$

Из треугольника скоростей (рис. 40) получим $u_e = u \cos \alpha$, так

$$\text{как } OA = \frac{H}{\cos \alpha}, \quad u = \frac{\omega_z H}{\cos^2 \alpha}, \quad \delta r = \frac{H \delta \varphi}{\cos^2 \alpha}.$$

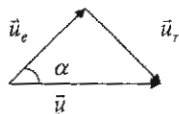


Рис. 40

Далее имеем

$$M\vec{u}\delta\vec{r} - M\vec{V}\delta\vec{r} + I_z\omega_z\delta\varphi = 0.$$

После вычислений получаем угловую скорость

$$\omega_z = \frac{MVH}{M \frac{H^2}{\cos^2 \alpha} + I \cos^2 \alpha}.$$

Д-13. В зацеплении рейки, имеющей массу m , и однородной шестерни 2 имеется зазор (рис. 41). Рейке 1 сообщена скорость v . Определить угловую скорость шестерни 2 после закрытия зазора. Масса и радиус шестерни 2 составляют M и R .

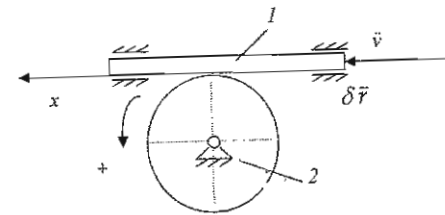


Рис. 41

Решение. Запишем общее уравнение механики для системы, состоящей из рейки и шестерни:

$$m(\vec{u} - \vec{v})\delta\vec{r} + I_z\omega_z\delta\varphi = 0,$$

где \vec{u} , ω_z – скорость рейки и угловая скорость шестерни после удара соответственно.

Кроме того, $u_x = R\omega_z$, $\delta r = R\delta\varphi$, $I_z = \frac{MR^2}{2}$, тогда угловая скорость

$$\omega_z = \frac{2mv}{(2m + M)R}.$$

Если нет зазора, то угловая скорость $\omega_z = \frac{v}{R}$. Если $M \rightarrow 0$, то

$$\omega_z \rightarrow \frac{v}{R}.$$

Определим изменение скорости рейки за время удара:

$$\Delta v = u_x - v = \frac{2m - 2m - M}{2m + M}v = -\frac{M}{2m + M}v.$$

Произошла потеря скорости рейки, а изменение угловой скорости $\Delta\omega_z = \omega_z > 0$.

Замечание: здесь возможные перемещения заданы в системе в соответствии с наложенными связями.

Рассмотрим изменение кинетической энергии системы

$$\Delta T = T - T_0 = \frac{mu^2}{2} + \frac{I_z\omega_z^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{v^2}{2} \left[A^2 \left(m + \frac{I_z}{R^2} \right) - m \right],$$

где $u = Av$; $A = \frac{2m}{2m + M}$.

Получаем

$$\Delta T = -\frac{Mm}{2m + M} \frac{v^2}{2} < 0.$$

Д-14. Материальная точка 1 массой m_1 ударяет по неподвижной рейке 2 массой m . Рейка находится в зацеплении с шестерней 3 (рис. 42, а). Зазор в зацеплении отсутствует. Удар точки 1 абсолютно неупругий ($k=0$). Определить скорость рейки после удара. Момент инерции шестерни относительно оси Oz равен I .

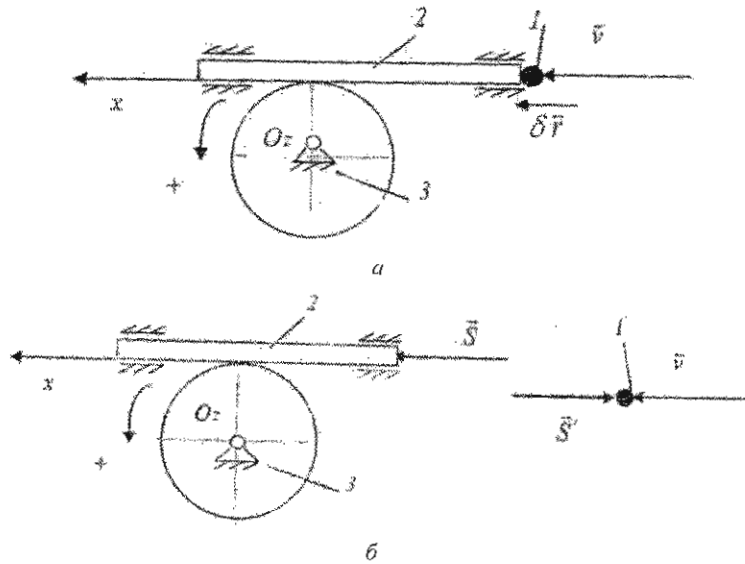


Рис. 42

Решение. Применяем к системе общее уравнение механики при ударе:

$$m_1(\bar{u}_1 - \bar{v})\delta\bar{r} + m\bar{u}\delta\bar{r} + I_z\omega_z\delta\varphi = 0,$$

где $\delta r = R\delta\varphi$; $\bar{u}_1 = \bar{u}$; $u_x = R\omega_z$. Тогда

$$u_x = \frac{m_1 v R^2}{(m_1 + m)R^2 + I}.$$

Д-15. Условие аналогично условию задачи Д-14, но полагаем $k \neq 0$ (рис. 42, б).

Решение. Рассмотрим две фазы удара. Тогда v – скорость точки до удара; u' , u'_1 , ω'_z – соответственно скорость рейки, точки и угловая скорость шестерни в конце первой фазы удара; u_1 , u – скорости точки и рейки; ω_z – угловая скорость шестерни после удара; \bar{S}_1 , \bar{S}_2 – ударные импульсы в фазах удара.

Из теоремы об изменении количества движения при ударе для точки запишем:

$$\begin{aligned} m_1(u_1 - v) &= -S_1; \\ m_1(u'_1 - v) &= -S_1; \\ m_1(u_1 - u'_1) &= -S_2; \\ k &= \frac{S_2}{S_1} = \frac{u_1 - u'_1}{u'_1 - v}. \end{aligned}$$

Применяем общее уравнение механики при ударе для тел 2, 3 в конце первой и второй фаз удара:

$$\begin{aligned} mu'\delta r + I_z\omega'_z\delta\varphi &= S_1\delta r; \\ m(u - u')\delta r + I_z(\omega_z - \omega'_z)\delta\varphi &= S_2\delta r; \\ u' = u'_1 = \omega'_z R, \quad u &= \omega_z R; \\ k &= \frac{S_2}{S_1} = \frac{m(u - u'_1)R + I_z(\omega_z - \omega'_z)}{mu'R + I_z\omega'_z}; \\ k &= \frac{S_2}{S_1} = \frac{u_1 - u'_1}{u'_1 - v} = \frac{u - u'_1}{u'_1 - v} = \frac{u - u_1}{v} = k. \end{aligned}$$

Система уравнений имеет окончательный вид

$$m_1(\ddot{u}_1 - \ddot{v})\delta\vec{r} + m(\ddot{u} - 0)\delta\vec{r} + I_z\omega_z\delta\varphi = 0, \quad u - u_1 = kv.$$

Тогда $m_1(u_{1x} - v) + mu_x + \frac{I}{R^2}u_x = 0$, где $u_{1x} = u_1$, $u_x = u$.

Окончательно получаем скорость

$$u_x = \frac{m_1(1+k)vR^2}{I + (m_1 + m)R^2}.$$

Д-16. Рейки 1 и 2 массами m_1 и m_2 соответственно могут двигаться по параллельным прямолинейным направляющим, приводя в движение шестерню C массой M и радиусом r (рис. 43). Механизм расположен на гладкой горизонтальной плоскости. К рейке 2 приложен ударный импульс S . Определить скорости реек и угловую скорость шестерни после удара. Шестерню принять за однородный диск. До удара система находилась в покое. Поверхности реек и направляющих гладкие.

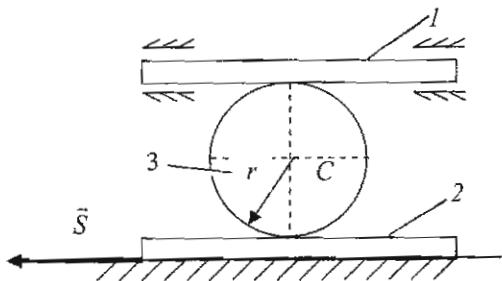


Рис. 43

Решение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из реек 1 и 2 и диска (рис. 44). Составим уравнения Лагранжа второго рода при ударе. Вычислим кинетическую энергию системы:

$$T = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} + \frac{I_{Cz} \omega^2}{2} + \frac{M V_C^2}{2},$$

$$V_C = \frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2}, \quad \omega = \frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{2r},$$

$$T = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} + \frac{Mr^2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2}{4 \cdot 4r^2} + \frac{M(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2}{8} =$$

$$= \frac{\dot{x}_1^2}{16}(3M + 8m_1) + \frac{\dot{x}_2^2}{16}(3M + 8m_2) + \frac{M}{8}\dot{x}_1\dot{x}_2.$$

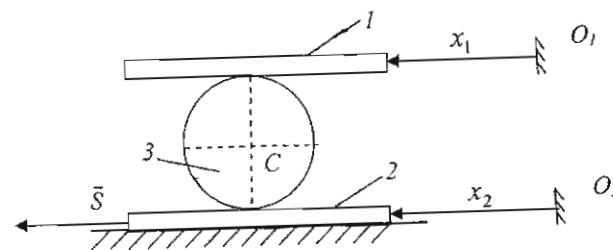


Рис. 44

Обобщенные импульсы $Q_{Sx_2} = S \frac{\delta x_2}{\delta x_2} = S$ и $Q_{Sx_1} = 0$.

Добавляем $\Delta \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}$ ($i = 1, 2$) в уравнения Лагранжа:

$$\Delta \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = \left\{ \frac{\dot{x}_1}{8}(3M + 8m_1) + \frac{M}{8}\dot{x}_2 \right\} \Big|_0^{t_1} = \left\{ \frac{\dot{x}_1}{8}(3M + 8m_1) + \frac{M}{8}\dot{x}_2 \right\} \Big|_{t_1} = 0,$$

$$\Delta \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = \left\{ \frac{\dot{x}_2}{8}(3M + 8m_2) + \frac{M}{8}\dot{x}_1 \right\} \Big|_0^{t_1} = S.$$

В результате получаем скорости

$$\dot{x}_1 = -\frac{MS}{M^2 + 3M(m_1 + m_2) + 8m_1m_2},$$

$$\dot{x}_2 = \frac{S(3M + 8m_1)}{M^2 + 3M(m_1 + m_2) + 8m_1m_2},$$

$$\omega = -\frac{2S(M + 2m_1)}{r\{M^2 + 3M(m_1 + m_2) + 8m_1m_2\}}.$$

Решим задачу с помощью общих теорем динамики (рис. 45–47).

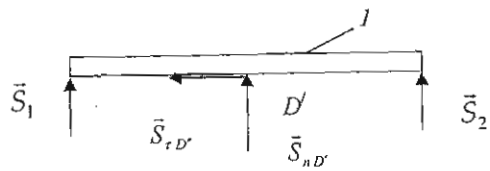


Рис. 45

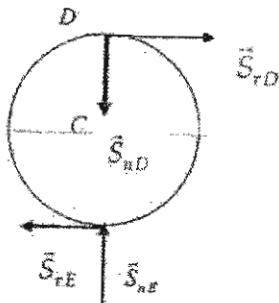


Рис. 46

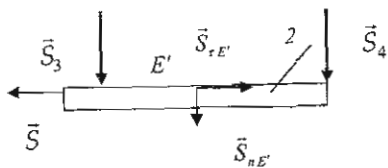


Рис. 47

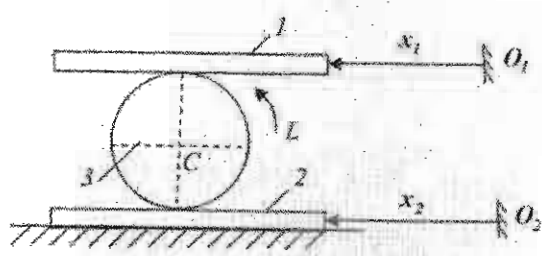


Рис. 48

Применим для реек 1, 2 и шестерни 3 с рис. 43 теоремы об изменении количества движения и кинетического момента системы при ударе:

$$S_{\tau D} = S_{\tau D'}, S_{nD} = S_{nD'}, S_{\tau E} = S_{\tau E'}, S_{nE} = S_{nE'},$$

$$m_1(\dot{x}_1 - 0) = S_{\tau D'}, m_2(\dot{x}_2 - 0) = -S_{\tau E'} + S,$$

$$M(u_C - 0) = S_{\tau E} - S_{\tau D}, M \frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2} = S_{\tau E} - S_{\tau D},$$

$$I_{Cz}(\omega - 0) = -S_{\tau E}r - S_{\tau D}r,$$

$$M \frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2} + m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = S.$$

Решая уравнения, получаем

$$\dot{x}_2 = \frac{(3M + 8m_1)S}{M^2 + 3M(m_1 + m_2) + 8m_1m_2}.$$

Д-17. В задачу Д-16 введем пружину жесткости c , соединяющую рейку с неподвижной стенкой (рис. 49).

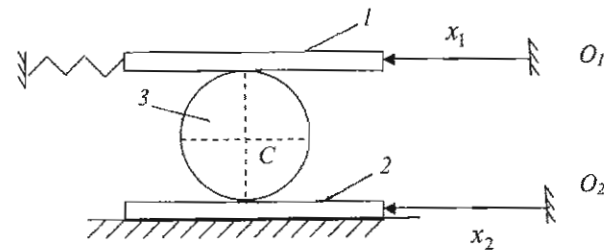


Рис. 49

Решение. Из решения задачи об ударе Д-16 находим скорости реек после удара, которые являются начальными для последующего движения системы:

$$\dot{x}_1 = -\frac{MS}{M^2 + 3M(m_1 + m_2) + 8m_1m_2},$$

$$\dot{x}_2 = \frac{S(3M + 8m_1)}{M^2 + 3M(m_1 + m_2) + 8m_1m_2}.$$

При тех же обобщенных координатах составим уравнение Лагранжа второго рода для движения системы после удара. Начальные условия:

$$\text{при } t = 0 \quad x_1 = 0, \dot{x}_1 = u_1, x_2 = 0, \dot{x}_2 = u_2.$$

Кинетическая энергия системы имеет вид

$$T = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} + \frac{MV_C^2}{2} + \frac{I_{Cz} \omega^2}{2},$$

$$V_C = \frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2}, \quad \omega_3 = \frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{2r}, \quad I_{Cz} = \frac{Mr^2}{2}.$$

Вычислим обобщенные силы:

$$\delta x_1 \neq 0, \quad \delta x_2 = 0, \quad Q_{x_1} = -cx_1,$$

$$\delta x_2 \neq 0, \quad \delta x_1 = 0, \quad Q_{x_2} = 0.$$

Тогда запишем уравнения Лагранжа второго рода

$$\ddot{x}_1 \frac{8m_1 + 3M}{8} + \ddot{x}_2 \frac{M}{8} + cx_1 = 0,$$

$$\frac{M}{8} \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 \frac{8m_2 + 3M}{8} = 0.$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$\ddot{x}_1 + k^2 x_1 = 0,$$

где $k^2 = \frac{c(8m_2 + 3M)}{3M(m_1 + m_2) + 8m_1 m_2 + M^2}.$

Решение уравнения имеет вид

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

где произвольные постоянные C_1 и C_2 определяют из начальных условий $C_1 = 0, C_2 = u_1/k.$

Тогда $x_1 = \frac{u_1}{k} \sin kt.$

Для определения x_2 получаем уравнение

$$\ddot{x}_2 = \frac{Mu_1 k}{8m_2 + 3M} \sin kt.$$

С использованием начальных условий получаем

$$x_2 = t \left(u_2 + \frac{Mu_1}{8m_2 + 3M} \right) - \frac{Mu_1}{k(8m_2 + 3M)} \sin kt,$$

$$x_1 = \frac{u_1}{k} \sin kt.$$

Скорости тел u_1 и u_2 определены ранее:

$$u_1 = -\frac{MS}{M^2 + 3M(m_1 + m_2) + 8m_1 m_2}, \quad u_2 = \frac{S(3M + 8m_1)}{M^2 + 3M(m_1 + m_2) + 8m_1 m_2}.$$

Д-18. К шестерне 3 механизма, описанного в задаче Д-16, приложена пара ударных импульсов с моментом L (см. рис. 48). Определить скорости реек и угловую скорость шестерни после удара, используя данные задачи Д-16.

Решение. Определим обобщенные импульсы (рис. 50) и найдем соотношение между возможными перемещениями $\delta x_1, \delta x_2$ и $\delta \varphi$:

$$Q_{Sx_1} = \frac{L\delta\varphi}{\delta x_1} = \frac{L}{2r}, \quad Q_{Sx_2} = -\frac{L\delta\varphi}{\delta x_2} = -\frac{L}{2r}.$$

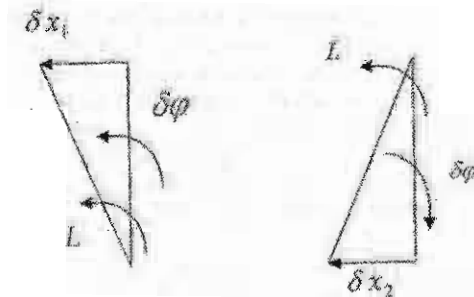


Рис. 50

Из рис. 50 следует

$$\delta x_1 = 2r\delta\varphi, \quad \delta x_2 = 0, \quad \delta x_2 = 2r\delta\varphi, \quad \delta x_1 = 0.$$

Составим уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{\dot{x}_1}{8}(3M + 8m_1) + \frac{M}{8}\dot{x}_2 = \frac{L}{2r},$$

$$\frac{M}{8}\dot{x}_1 + \frac{\dot{x}_2}{8}(3M + 8m_2) = -\frac{L}{2r}.$$

Решим систему линейных уравнений относительно \dot{x}_1 и \dot{x}_2 и определим скорости реек:

$$\dot{x}_1 = \frac{\Delta\dot{x}_1}{\Delta} = \frac{2\frac{L}{r}(M + 2m_2)}{M^2 + 3M(m_1 + m_2) + 8m_1m_2}, \quad \Delta\dot{x}_1 = 16\frac{L}{r}(M + 2m_2),$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\Delta\dot{x}_2}{\Delta} = -\frac{2\frac{L}{r}(M + 2m_1)}{M^2 + 3M(m_1 + m_2) + 8m_1m_2}, \quad \Delta\dot{x}_2 = -16\frac{L}{r}(M + 2m_1),$$

$$\Delta = 8M^2 + 24M(m_1 + m_2) + 64m_1m_2.$$

Отсюда находим угловую скорость шестерни

$$\omega = \frac{L}{r^2} \frac{2(M + m_1 + m_2)}{M^2 + 3M(m_1 + m_2) + 8m_1m_2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сборник задач по теоретической механике: Учеб. пособие для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. / Под ред. К.С. Колесникова. М.: Наука, 1989.
2. Использование ЭВМ в учебном процессе при изучении курса «Теоретическая механика»: Метод. пособие / В.В. Дубинин, Е.Н. Солохин, А.В. Ремизов и др. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.
3. Применение ЭВМ при решении задач динамики (Курс теоретической механики: общие теоремы динамики, удар): Препр. № 487 / В.В. Дубинин, В.А. Калиниченко, В.Л. Машковский и др.; Институт проблем механики АН СССР. М., 1991.
4. Курс теоретической механики / В.И. Дронг, В.В. Дубинин, М.М. Ильин и др.; Под ред. К.С. Колесникова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Статика	4
2. Кинематика	13
3. Динамика	24
Список литературы	56