

Решение.

1. На основании теоремы о одинаковых проекциях ускорений точек твердого тела на одну из прямых плоскости движения эта прямая лежит посередине между направлениями векторов одинаковых ускорений точек В и С, т.е. под углом 15° к этим векторам. Тогда вектор ускорения точки А направлен к этой прямой под углом

$$\alpha + \beta + 15^\circ = 60^\circ.$$

Проекции векторов ускорений точек В и С (а также вектора ускорения точки А) на эту прямую равны $2\cos 15^\circ$.

Тогда ускорение точки А

$$a_A = \frac{2\cos 15^\circ}{\cos 60^\circ} = 3,86 \text{ м/с}^2.$$

2. На основании теоремы о одинаковых проекциях ускорений точек твердого тела на одну из прямых плоскости движения эта прямая и есть ось х, а угол

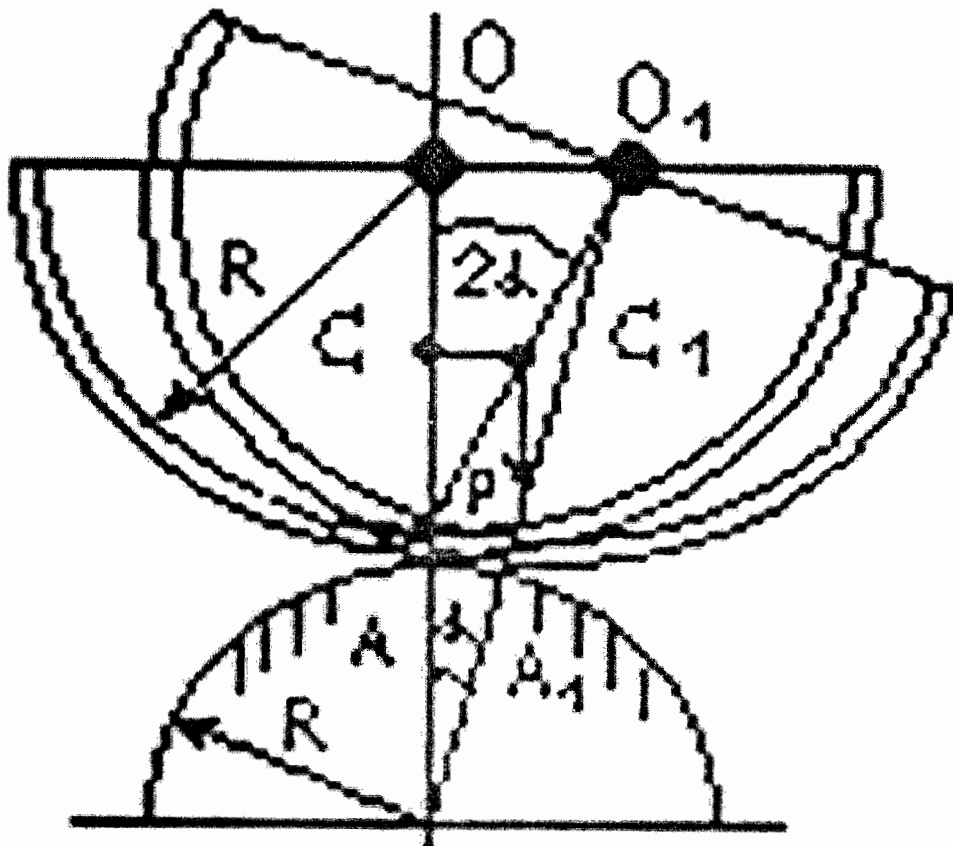
$$\beta = \arctg \frac{\omega^2}{\varepsilon} = 45^\circ;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{a_B}{a_A} = 0,5.$$

Тогда $(\alpha + \beta) = \arccos 0,5 = 60^\circ$. Отсюда

$$\alpha = 60^\circ - \beta = 15^\circ.$$

Рисунок к задаче 8.



3. Указанные уравнения выполняются, если система сил уравновешена или имеет равнодействующую в плоскости xOy. Поэтому уравнения достаточны для равновесия, если т. А не находится в плоскости xOy; в противном случае они не достаточны.

4. Изменение горизонтального количества движения за счёт захвата и стекания воды равно импульсу дополнительной силы сопротивления

$$F_{\text{дон}} = \frac{m(V-0)}{t}; \quad \text{дополнительная мощность}$$

$$N_{\text{дон}} = F_{\text{дон}} * V = \frac{mV^2}{t} = \frac{1 * 25^2}{1} = 625 \text{ Вт.}$$

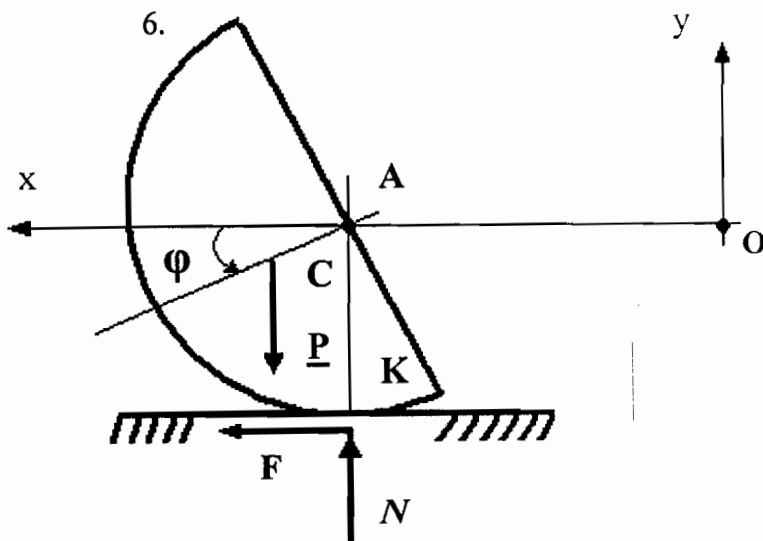
”Решение” по теореме об изменении кинетической энергии ошибочно и даёт вдвое меньший результат, т.к. при захвате капля энергии тратится не только на их разгон, но и на нагрев за счёт работы внутренних сил системы.

5. Орбитальная скорость V_R определяется из условия равенства

центробежной силы и силы тяготения: $\frac{mV_R^2}{R} = \frac{mgR_0^2}{R^2}$, где R_0 – радиус Земли.

По теореме об изменении кинетической энергии

$$\begin{aligned} \frac{mV_R^2}{2} - \frac{mV_H^2}{2} &= A_{\text{тягот}} = - \int_{R_0+H}^R P(r) dr = - \int_{R_0+H}^R \frac{mgR_0^2}{r^2} * dr = \\ &= mgR_0^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0+H} \right); \quad V_u = \sqrt{V_R^2 - 2gR_0^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0+H} \right)} = R_0 \sqrt{g \left(\frac{2}{R_0+H} - \frac{1}{R} \right)}. \end{aligned}$$



Уравнения плоского движения, где $l = |AC|$:

$$m\ddot{x}_c = F, \quad m\ddot{y}_c = N - P, \quad I_C * \ddot{\varphi} = Nl \cos \varphi - F(r - l \sin \varphi).$$

Кинетическая энергия:

$$T = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{I_c * \omega^2}{2} = \frac{m}{2} (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + i_c^2 * \dot{\varphi}^2), \quad i_c - \text{радиус инерции}$$

1) $F=0 \rightarrow \ddot{x}_c=0, \quad \dot{x}_c=0, \quad x_c=x_c^0$ (ц.т. опускается вертикально);

$$y_c = -l \sin \varphi, \quad \dot{y}_c = -l \cos \varphi * \dot{\varphi}, \quad \ddot{y}_c = l(\sin \varphi * \dot{\varphi}^2 - \cos \varphi * \ddot{\varphi});$$

$$\text{в начальный момент } \varphi_0 = \dot{\varphi}_0 = 0, \quad I_c \ddot{\varphi}_0 = N * l = (P + m\dot{y}_c^0)l = ml(g - l\ddot{\varphi}_0),$$

$$\varepsilon_0 = \ddot{\varphi}_0 = \frac{gl}{i_c^2 + l^2} = \frac{gl}{i_A^2} = \frac{2gl}{r^2};$$

$$\text{в нижнем положении } T_{\max} - T_0 = A = mgl, \quad V_c = 0, \quad \frac{m}{2} * i_c^2 \dot{\varphi}_{\max}^2 = mgl,$$

$$\omega_{\max} = \dot{\varphi}_{\max} = \sqrt{\frac{2gl}{i_c^2}}.$$

$$2) x_A = x_A^0 + r\varphi = x_c - l \cos \varphi, \quad \dot{x}_c = (r - l \sin \varphi) * \dot{\varphi}, \quad \ddot{x}_c = r\ddot{\varphi} - l(\cos \varphi * \dot{\varphi}^2 + \sin \varphi * \ddot{\varphi});$$

при

$$\varphi_0 = \dot{\varphi}_0 = 0: \quad F = mr\ddot{\varphi}_0, \quad N = m(g - l\ddot{\varphi}_0), \quad i_c^2 \ddot{\varphi}_0 = (g - l\ddot{\varphi}_0)l - r^2 \ddot{\varphi}_0,$$

$$\varepsilon_0 = \ddot{\varphi}_0 = \frac{gl}{i_c^2 + l^2 + r^2} = \frac{gl}{i_A^2 + r^2} = \frac{2gl}{3r^2}; \quad \text{в нижнем положении}$$

$$T_{\max} = \frac{I_K * \omega_{\max}^2}{2}, \quad I_K = mi_K^2 = m[i_c^2 + (r-l)^2], \quad T_{\max} = mgl, \quad \omega_{\max} = \sqrt{\frac{2gl}{i_K^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2gl}{i_c^2 + (r-l)^2}}.$$

$$7. \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{уравнение Лагранжа,}$$

φ - обобщенная координата;

$$T = 4 \left(\frac{mV_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2} \right) = 2m\omega^2 \left(\frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{12} \right) = \frac{2ml^2}{3} * \dot{\varphi}^2, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{4ml^2}{3} * \ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0;$$

$$\Pi = \frac{c\Delta^2}{2} = \frac{c}{2} (2l \cos \alpha * \varphi)^2 = 2cl^2 \cos^2 \alpha * \varphi^2, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 4cl^2 \cos^2 \alpha * \varphi;$$

$$\frac{4ml^2}{3} \ddot{\varphi} + 4cl^2 \cos^2 \alpha * \varphi = 0, \quad \ddot{\varphi} + \frac{3c \cos^2 \alpha}{m} \varphi = 0, \quad k = \cos \alpha \sqrt{\frac{3c}{m}}.$$

8. Равновесие устойчиво, если при отклонении силы стремятся вернуть тело к положению равновесия, в данном случае

$$OC = \frac{2R}{\pi}, \quad CC_1 \approx 2\alpha * AC = 2\alpha * R \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) = 0,728\alpha R,$$

$AA_1 \approx \alpha R$, т.е. $CC_1 < AA_1$, поэтому равновесие устойчиво.

9. Каждый шарнирный стержень даёт одну реакцию. Т.к. для равновесия при любых нагрузках достаточно шести уравнений равновесия, то конструкция будет жесткой и статически определённой только при шести стержнях, но любое из уравнений равновесия должно содержать хотя бы одну реакцию. Например, уравнения моментов вокруг оси BG содержит только реакцию S_3 ,

т.е. стержень 3 выбрасывать нельзя. Должны быть так же стержни 5 (ось АЕ) и 6 (ось ВН). Возможны комбинации (3,5,6,1,2,4), (3,5,6,1,2,7), (3,5,6,1,4,7) и (3,5,6,2,4,7).

10. Стержень ВС при нагружении по концам воспринимает только продольную силу. Поэтому

$$P_1 = P_2, \quad \frac{M_1}{h_1} = \frac{M_2}{h_2}, \quad \frac{M_1}{a \cos(\beta - \alpha)} = \frac{M_2}{c \sin \beta}.$$

11. Если к патрубку добавить донышки, то давление будет уравновешено.

$$\text{Силы на эллиптические донышки } P_1 = \frac{\pi r^2 q}{\sin \alpha}, \quad P_2 = \frac{\pi r^2 q}{\cos \alpha} \text{ с}$$

равнодействующей

$$R' = \frac{P_1}{\cos \alpha} = \frac{\pi r^2 q}{\sin \alpha \cos \alpha}.$$

Искомая равнодействующая $\bar{R} = -\bar{R}'$, она \perp к оси трубы (как и силы давления на патрубок) и проходит через т. С, для которой

$$\frac{AC}{BC} = \frac{DC * tg \alpha}{DC * ctg \alpha} = tg^2 \alpha.$$

12. Условия равновесия кулачка

$$M + M_0(\bar{P}) \leq M_0(\bar{F}_{mp}), \text{ где}$$

$$F_{mp} = f * P, \text{ т.е. } M + P * \frac{R}{2} \sin \alpha \leq f * P * \frac{R}{2} (2 + \cos \alpha).$$

Если $M = 0$, то, $\sin \alpha \leq f(2 + \cos \alpha)$ – условие

самоторможения.

13. Дифференциальное уравнение относительного движения частиц

$$m\ddot{x} = \sum P_{kx} + \phi_x^{nep} + \phi_x^{kop} = m\omega^2 x, \quad \ddot{x} - \omega^2 x = 0, \text{ его решения при}$$

начальных условиях $x_0 = 0$, V_0 имеет вид: $x(t) = \frac{V_0}{\omega} sh \omega t$. Относительная

скорость $V(t) = \dot{x}(t) = V_0 ch \omega t$;

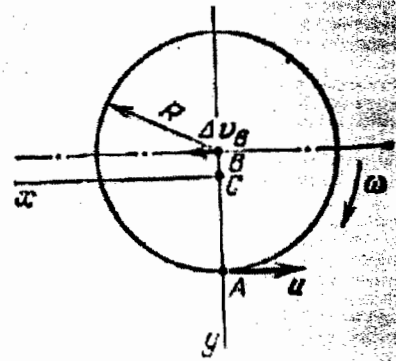
$$\text{на краю } x = R \quad sh \omega t = \frac{R\omega}{V_0} \quad V(t) = V_0 \sqrt{1 + sh^2 \omega t} = \sqrt{V_0^2 + (R\omega)^2},$$

абсолютная скорость

$$V_{abs} = \sqrt{V_{отн}^2 + V_{пер}^2} = \sqrt{V_0^2 + (R\omega)^2 + (R\omega)^2} = \sqrt{V_0^2 + 2R^2\omega^2}.$$

14. В соответствии с теоремой о движении центра масс заключаем, что центр масс системы — точка С может перемещаться только перпендикулярно к плоскости станции (плоскость DD). Заметим, что при движении космонавта с центром масс системы будут совпадать различные точки станции. Центр масс самой станции — точка В — должен двигаться при этом так, чтобы его скорость была параллельна скорости u (в противном случае компонента количества движения системы вдоль линии ВС не будет равна нулю).

Из условия равенства нулю проекции количества движения системы на ось Сх



$$M\Delta v_B + m(\Delta v_B + \omega R - u) = 0,$$

где Δv_B — приращение скорости точки В, получим

$$\Delta v_B = (u - \omega R) \cdot (m / (M+m)). \quad (1)$$

Теорема об изменении кинетического момента системы относительно оси Cz дает

$$m(u - \Delta v_B - \omega R)AC + M\Delta v_B CB - I_B \omega = 0, \quad (2)$$

где $I_B = Mr^2$ — момент инерции станции относительно ее оси симметрии.

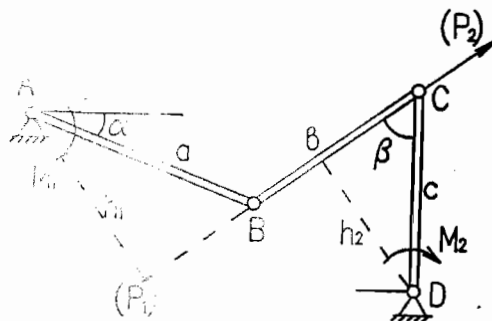
Учитывая, что $AC = (M / (M+m)) \cdot R$,

$BC = (m / (M+m)) \cdot R$, решая совместно (1) и (2), получаем

$$\omega = (u/R) \cdot (1 / ((p^2 \cdot (M+m)) / (R^2 \cdot m) + 1));$$

$$\Delta v_B = u / (((M+m) / m) + (R^2/p^2)) = 0,00396u.$$

Рисунок к задаче 10.



15. Система имеет две степени свободы до удара диска об упор D. Запишем кинематические уравнения для скоростей точек до удара в системе:

$$v_B = v_A + v_{BA} = v_C + v_{BC}, \quad v_E = v_A + v_{EA}, \\ v_{BA} = \omega_{AB} l,$$

где ω_{AB_0} — угловая скорость звена AB до удара,

$$v_{BC} = \omega_0 r, \quad v_{EA} = \omega_{AB_0} \frac{l}{2}.$$

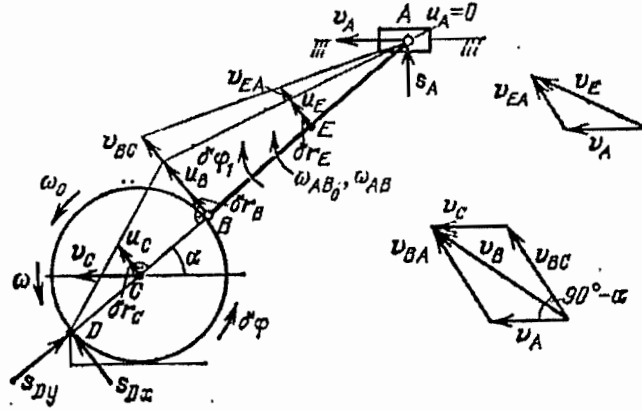
Из многоугольников скоростей имеем

$$v_C = v_A, \quad v_{BC} = v_{BA}, \quad v_{EA} = \frac{v_{BA}}{2}.$$

Соотношение для скоростей точек после удара запишем с учетом того, что скорость точки D по условиям задачи после удара равна нулю ($U_D = 0$):

$$u_C = \omega r, \quad u_B = 2u_C = 2\omega r = \omega_{AB} l (*), \quad u_E = \omega_{AB} l / 2,$$

где ω и ω_{AB} — угловые скорости диска и стержня после удара.



Зададим системе возможное перемещение в соответствии с наложенными на систему при ударе связями

$$\delta r_B = 2\delta r_C = l\delta\varphi_1 = 2r\delta\varphi, \quad \delta r_E = \frac{\delta r_B}{2}.$$

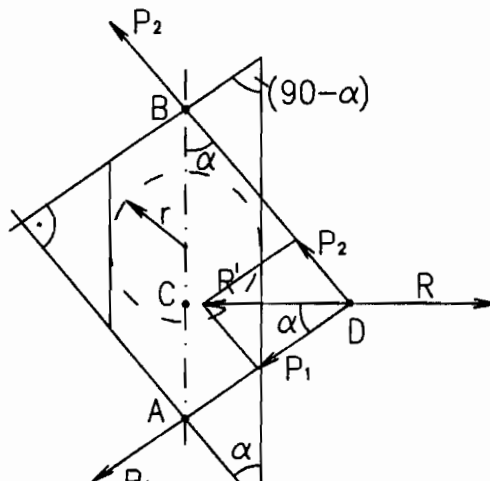
Общее уравнение механики для системы при ударе запишется так:

$$M(u_C - v_C)\delta r_C + J_{Cz}(\omega - \omega_0)\delta\varphi + \\ + m(u_E - v_E)\delta r_E + J_{Ez}(\omega_{AB} - \omega_{AB_0})\delta\varphi_1 = 0.$$

После преобразований получим

$$\omega = \frac{6(M + m)v_A \sin \alpha + \omega_0 r(3M + 4m)}{r(9M + 8m)}.$$

Рисунок к задаче 11.

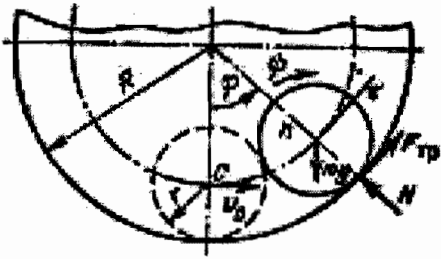


16. Запишем дифференциальные уравнения плоского движения

$$ma_{\tau} = F_{\text{тр}} - mg \sin \varphi, \quad (1)$$

$$ma_n = N - mg \cos \varphi, \quad (2)$$

$$\frac{mr^2}{2} \ddot{\varphi} = -F_{\text{тр}} r, \quad (3)$$



кинематические соотношения

$$v_C = (R - r) \dot{\varphi}, \quad a_{\tau} = (R - r) \ddot{\varphi}, \quad a_n = \frac{v_C^2}{R - r}, \quad (4)$$

условие отсутствия скольжения

$$r \dot{\varphi} = v_C = (R - r) \dot{\varphi}. \quad (5)$$

Из (1) и (3) с учетом (4) и (5) получаем силу трения, необходимую для качения без скольжения:

$$(6) \quad F_{\text{тр. неос}} = \frac{mg}{3} \sin \varphi.$$

Максимально возможная сила трения определяется с учетом (2) и (4)

$$(7) \quad F_{\text{тр. макс}} = fN = f \left(mg \cos \varphi + m \frac{v_C^2}{R - r} \right).$$

Теорема об изменении кинетической энергии дает $T - T_0 = \sum A^{(e)}$, (8)

$$\text{где} \quad T = \frac{3}{4} m v_C^2; \quad T_0 = \frac{3}{4} m v_0^2; \quad \sum A^{(e)} = -mg(R - r)(1 - \cos \varphi). \quad (9)$$

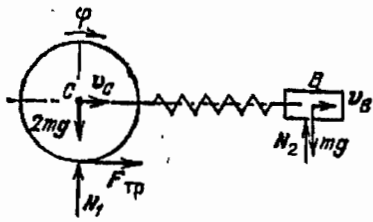
$$\text{Из (8) и (9) получаем} \quad \frac{m v_C^2}{R - r} = \frac{4}{3} mg(1 - \cos \varphi);$$

откуда с учетом (7)

$$F_{\text{тр. макс}} = fmg \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cos \varphi \right). \quad (10)$$

Сопоставляя (6) и (10) и учитывая, что $f = \frac{\sqrt{15}}{15}$, получаем $\varphi = 75,5^\circ$.

17.



Теорема об изменении количества движения для системы в целом дает
$$\frac{d}{dt}(2mv_C + mv_B) = F_{\text{тр}}. \quad (1)$$

Из теоремы об изменении кинетического момента для цилиндра относительно оси, проходящей через центр масс, получаем

$$(2) \quad I_{Cz}\ddot{\varphi} = 2m \frac{r^2}{2} \frac{d\omega}{dt} = -F_{\text{тр}} \cdot r.$$

Учитывая, что при отсутствии скольжения $\omega \cdot r = v_{Cx}$ получаем из (2)

$$(3) \quad m \frac{dv_C}{dt} = -F_{\text{тр}}.$$

Тогда из (1) и (3) имеем

$$\frac{d}{dt}(3mv_C + mv_B) = 0,$$

или

$$3mv_C + mv_B = \text{const.}$$

При $t=0$ $v_C(0) = v_B(0) = 0$, откуда $v_B = -3v_C$.

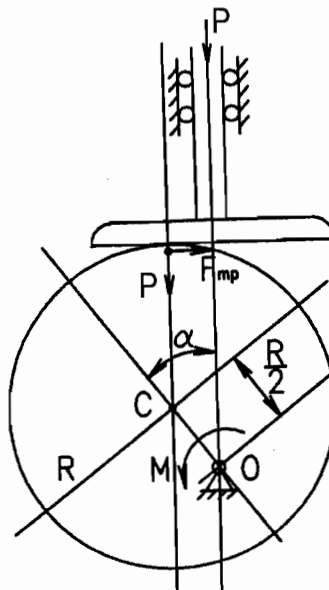
По теореме об изменении кинетической энергии для системы

$$T - T_0 = \sum A^{(e. i)},$$

где $T_0 = 0$, $T = 6mv_C^2$, $\sum A^{(e. i)} = \frac{F_{\text{тр}}^2}{2}$.

Отсюда $v_C = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{F}{3m}}$.

Рисунок к задаче 12.



18. При решении задач на принцип возможных перемещений необходимо иметь в виду, что из определения вектора возможного перемещения точки и вектора ее возможной скорости следует, что для этих векторов справедливы одни и те же теоремы кинематики.

Значит, для нахождения соотношений между возможными перемещениями (линейными и угловыми) отдельных точек или звеньев механизма можно использовать все приемы, известные из кинематики для скоростей.

Сообщим стержню 1 возможное перемещение $\delta\varphi_1$, направленное против хода часовой стрелки. Так как направления возможных скоростей точек A и B при этом будут известны, то можно найти мгновенный центр возможных скоростей шестерни 3 — точку P . Тогда для вектора возможного перемещения точки A можно записать

$$\delta r_A = OA\delta\varphi_1, \quad \delta r_A = AP\delta\psi.$$

Вычисляя

AP , устанавливаем, что

$$\delta\psi = \frac{5}{3} \delta\varphi_1.$$

Для нахождения зависимости между $\delta\varphi_2$ и $\delta\psi$ можно также воспользоваться методами кинематики плоского движения, но можно применить и обычную процедуру метода останки. Имея в виду последнее, сообщим стержню 1 противоположно направленное угловое перемещение ($-\delta\varphi_1$) (т. е. по ходу часовой стрелки). Тогда, используя обычное правило знаков, получаем, что угловое перемещение шестерни 2 будет равно $\delta\varphi_2 - \delta\varphi_1$, а угловое перемещение шестерни 3 равно $-\delta\psi - \delta\varphi_1$.

Рассматривая шестерни как диски, для точки их касания получаем

$$r|\delta\varphi_2 - \delta\varphi_1| = R|-\delta\psi - \delta\varphi_1|,$$

или

$$r\delta\varphi_2 = R\left(\frac{5}{3} + 1\right)\delta\varphi_1 + r\delta\varphi_1.$$

Отсюда

$$\delta\varphi_2 = \frac{41}{9}\delta\varphi_1.$$

Теперь записываем принцип возможных перемещений:

$$M_1\delta\varphi_1 - M_2\delta\varphi_2 = 0,$$

что дает

$$M_2 = \frac{9}{41} M_1.$$

