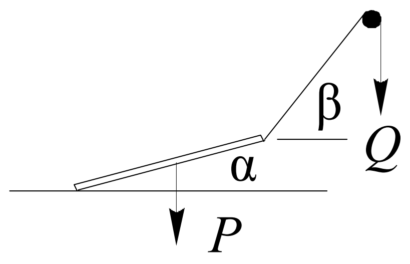
# Московская студенческая олимпиада по теоретической механике 2009 г. (МФТИ, 17 мая 2009)

**Задача С-1** (8 баллов)

Однородный стержень веса $P$ опирается своим нижним концом на шероховатую горизонтальную плоскость и удерживается в равновесии под углом $\alpha$ к горизонту верёвкой, привязанной к её верхнему концу. Верёвка, перекинута через неподвижный шероховатый цилиндр и на другом конце несёт груз весом $Q$. Коэффициент трения стержня о плоскость и коэффициент трения верёвки о цилиндр равны $f$. Найти максимальное значение $Q$.




***Решение***:

Угол охвата цилиндра верёвкой равен $\frac{\pi}{2}+\beta$. На верхний конец стержня по нити действует сила $Q\exp\left(-f\frac{\pi}{2}-f\beta\right)$. На нижнем конце имеем вертикальную реакцию $N$ и горизонтальную силу трения $F = fN$.

Уравнения равновесия стержня

$$Q\exp\left(-f\frac{\pi}{2}-f\beta\right)\cos\beta - fN = 0,$$

$$Q\exp\left(-f\frac{\pi}{2}-f\beta\right)\sin\beta + N - P = 0,$$

$$P\frac{l}{2}\cos\alpha - N\,l\cos\alpha - fN\,l\sin\alpha = 0.$$

Из последнего уравнения определяем вертикальную реакцию $N = \frac{P}{2(1+ftg\alpha)}$.

Первые два уравнения примут вид

$$Q\exp\left(-f\frac{\pi}{2}-f\beta\right)\cos\beta = \frac{fP}{2(1+ftg\alpha)},$$

$$Q\exp\left(-f\frac{\pi}{2}-f\beta\right)\sin\beta = \frac{P(1+2ftg\alpha)}{2(1+ftg\alpha)},$$

таким образом, получаем

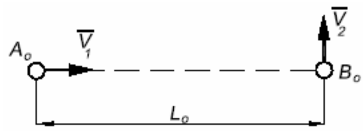
$$ctg\beta = \frac{f}{1+2ftg\alpha},$$

$$Q = \exp\left(f\frac{\pi}{2}+f\beta\right)\frac{P\sqrt{f^2+(1+2ftg\alpha)^2}}{2(1+ftg\alpha)}$$

***Ответ***: $Q = \exp\left(f\frac{\pi}{2}+f\beta\right)\frac{P\sqrt{f^2+(1+2ftg\alpha)^2}}{2(1+ftg\alpha)}$, где $ctg\beta = \frac{f}{1+2ftg\alpha}$.

**Задача К-1** (4 балла)

Две точки A и B движутся по прямым, расположенным в одной плоскости, с постоянными скоростями $V_1$ и $V_2$. В начальный момент времени расстояние между точками равно $l_0$, направления скоростей указаны на чертеже. Определить минимальное расстояние между точками $A$ и $B$.




***Решение***:
Расстояние между точками $A$ и $B$ в момент времени $t$:

$$S^2 = (l_0 - V_1 t)^2 + (V_2 t)^2 = l_0^{\,2} - 2V_1 t l_0 + (V_1^2 + V_2^2)t^2 \qquad (1)$$

Дифференцируя по времени

$$\frac{dS}{dt} = -2V_1 l_0 + 2(V_1^2 + V_2^2)t \qquad (2)$$

Поскольку вторая производная S по времени строго положительна, в момент времени $\tau$

$$\tau = \frac{V_1 l_0}{V_1^2 + V_2^2} \qquad (3)$$

S достигает минимума.

Окончательно, подставив (3) в (1), получим

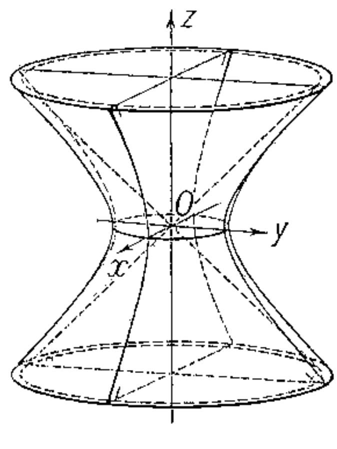
$$S_{\min} = \frac{l_0^2 V_2^2}{V_1^2 + V_2^2}$$

***Ответ:*** $S_{\min} = \dfrac{l_0^2 V_2^2}{V_1^2 + V_2^2}$

**Задача К-4** (6 баллов)

Точка движется по поверхности, задаваемой в некоторой неподвижной системе координат уравнением $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$. Возможно ли такое движение точки, что ее ускорение равно нулю? Обосновать невозможность такого движения, либо найти все соответствующие искомому движению траектории.

***Решение***:
Движение с нулевым ускорением возможно только в том случае, если траектория – прямая линия, а скорость точки постоянна. Поверхность $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ представляет собой однополостной гиперболоид, имеющий два семейства прямолинейных образующих.




Две прямые этого семейства, проходящие через точку $(a, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ имеют вид

$$x = a$$

$$z = \pm y$$

Остальные прямые семейства получаются из этих двух прямых поворотом на произвольный угол $\theta$ вокруг оси O$z$

***Ответ:*** $\begin{array}{l} a = x\cos\theta - y\sin\theta \\ z = \pm(x\sin\theta + y\cos\theta) \end{array}$, где $\theta$ - параметр семейства

**Задача Д-1 (8 баллов)**

Некоторые умельцы при отсутствии штопора открывают бутылки с вином, отпуская их с определенной высоты на пол. После удара о пол пробка оказывается выбитой, а бутылка в целости и сохранности, стоящей на полу. Предлагается этот процесс смоделировать падением последовательно одна за другой масс $m_1, m_2, ..., m_n$ $\left( m = \sum_{k=1}^{n} m_k \right)$. В момент отражения первой массы от пола она сталкивается со второй массой и останавливается. Вторая масса после отражения от первой сталкивается с третьей массой и также останавливается т.д. И только последняя масса после отражения от предыдущей массы свободно движется вертикально вверх (и выбивает пробку). При каком соотношении масс имеет место описанный процесс и какова скорость последней массы, если перед ударом скорость всей системы равна $V$ ? Удары считать абсолютно упругими.

***Решение***: Массы падают с одной высоты. На уровне пола первая масса после отражения имеет скорость $V_1 = V$, а вторая скорость $V_2 = -V$. Центр масс системы имеет скорость $V_C = \dfrac{m_1 V - m_2 V}{m_1 + m_2}$. В системе центра масс имеем скорости

$$V_1' = V - V_C = \frac{2m_2 V}{m_1 + m_2}, \quad V_2' = -V - V_C = -\frac{2m_1 V}{m_1 + m_2}$$

После столкновения в системе центра масс каждая масса изменяет свою скорость на противоположную $V_1'' = -\dfrac{2m_2 V}{m_1 + m_2}$, $V_2'' = \dfrac{2m_1 V}{m_1 + m_2}$. Поскольку скорость центра масс остаётся неизменной имеем

$$V_1 = V_1'' + V_C = \frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2} V, \quad V_2 = V_2'' + V_C = \frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V .$$

Удары упругие, энергия сохраняется, и скорость второй массы будет максимальной, если энергия первой после столкновения обратится в нуль, то есть $m_1 = 3m_2$, $V_2 = 2V$.

Те же рассуждения применяем для второй и третьей массы. До столкновения имеем

$$V_C = \frac{m_2 2V - m_3 V}{m_2 + m_3},$$

$$V_2' = 2V - V_C = \frac{3m_3 V}{m_2 + m_3}, \quad V_3' = -V - V_C = -\frac{3m_2 V}{m_2 + m_3},$$

а после столкновения

$$V_2 = -\frac{3m_3 V}{m_2 + m_3} + V_C = \frac{(-4m_3 + 2m_2)V}{m_2 + m_3}, \quad V_3 = \frac{3m_2 V}{m_2 + m_3} + V_C = \frac{(5m_2 - m_3)V}{m_2 + m_3} .$$

Полагая $m_2 = 2m_3$, получаем $V_3 = 3V$.

Аналогично для третьей и четвёртой массы имеем $V_C = \dfrac{m_3 3V - m_4 V}{m_3 + m_4}$,

$$V_3' = 3V - V_C = \frac{4m_4 V}{m_3 + m_4}, \quad V_4' = -V - V_C = -\frac{4m_3 V}{m_3 + m_4}$$ и далее

$$V_3 = -\frac{4m_4 V}{m_3 + m_4} + V_C = \frac{(-5m_4 + 3m_3)V}{m_3 + m_4}, \quad V_4 = \frac{4m_3 V}{m_3 + m_4} + V_C = \frac{(7m_3 - m_4)V}{m_3 + m_4}$$

Полагая $m_3 = \dfrac{5}{3} m_4$, получаем $V_4 = 4V$.

Итак, имеем ряд значений

$$V_1 = -\frac{2m_2V}{m_1+m_2} + V_C = \frac{-3m_2+m_1}{m_1+m_2}V, \qquad V_2 = \frac{2m_1V}{m_1+m_2} + V_C = \frac{3m_1-m_2}{m_1+m_2}V\ ,$$

$$m_1 = 3m_2, \quad V_2 = 2V\ ;$$

$$V_2 = -\frac{3m_3V}{m_2+m_3} + V_C = \frac{-4m_3+2m_2}{m_2+m_3}V, \quad V_3 = \frac{3m_2V}{m_2+m_3} + V_C = \frac{5m_2-m_3}{m_2+m_3}V\ ,$$

$$m_2 = 2m_3, \quad V_3 = 3V\ ;$$

$$V_3 = -\frac{4m_4V}{m_3+m_4} + V_C = \frac{-5m_4+3m_3}{m_3+m_4}V, \quad V_4 = \frac{4m_3V}{m_3+m_4} + V_C = \frac{7m_3-m_4}{m_3+m_4}V$$

$$m_3 = \frac{5}{3}m_4, \quad V_4 = 4V\ ;$$

$$V_{n-1} = \frac{-(n+1)m_n + (n-1)m_{n-1}}{m_{n-1}+m_n}V, \quad V_n = \frac{(2n-1)m_{n-1}-m_n}{m_{n-1}+m_n}V\ ,$$

$$m_{n-1} = \frac{n+1}{n-1}m_n, \quad V_n = nV\ ; \qquad (1)$$

Наконец, рассмотрим столкновение $n$ и $n+1$ массы. Центр их масс имеет скорость $V_C = \frac{m_nnV - m_{n+1}V}{m_n+m_{n+1}}$. В системе центра масс до столкновения имеем относительные скорости

$$V_n' = nV - V_C = \frac{(n+1)m_{n+1}V}{m_n+m_{n+1}}, \quad V_{n+1}' = -V - V_C = -\frac{(n+1)m_nV}{m_n+m_{n+1}},$$

после столкновения они изменяют свой знак, поэтому имеем

$$V_n = -\frac{(n+1)m_{n+1}V}{m_n+m_{n+1}} + V_C = \frac{-(n+2)m_{n+1}+nm_n}{m_n+m_{n+1}}V,$$

$$V_{n+1} = \frac{(n+1)m_nV}{m_n+m_{n+1}} + V_C = \frac{(2n+1)m_n - m_{n+1}}{m_n+m_{n+1}}V.$$

Из этих выражений получаем $\quad m_n = \frac{n+2}{n}m_{n+1}, \quad V_{n+1} = (n+1)V$ ,

что совпадает с результатом (1) для индекса на единицу больше.

Для масс имеем выражения:

$$m_2 = \frac{2m_1}{2\cdot 3}, \quad m_3 = \frac{2m_1}{3\cdot 4}, \quad m_4 = \frac{2m_1}{4\cdot 5}, \quad \ldots \quad m_k = \frac{2m_1}{k(k+1)}.$$

Составим выражение для массы всей системы

$$m = \sum_{k=1}^{n} m_k = m_1 + 2m_1\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right] =$$

$$= 2m_1\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = m_1\frac{2n}{n+1} \quad\to\quad m_1 = \frac{m(n+1)}{1\cdot 2\cdot n}, \quad m_2 = \frac{m(n+1)}{2\cdot 3\cdot n},$$

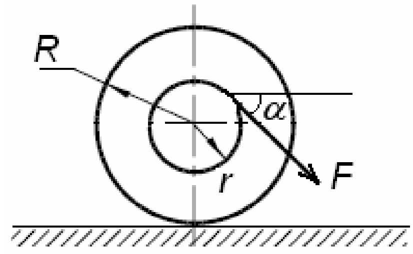
$$m_3 = \frac{m(n+1)}{3\cdot 4\cdot n}, \quad m_4 = \frac{m(n+1)}{4\cdot 5\cdot n}, \quad \ldots \quad m_k = \frac{m(n+1)}{k(k+1)n}, \quad \ldots \quad m_n = \frac{m}{n^2}$$

Кинетическая энергия последней массы равна энергии всей системы в начальный момент.

***Ответ:*** $m_k = \frac{m(n+1)}{k(k+1)n}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \quad V_n = nV$ .

**Задача Д-2 (6 баллов)**

Катушка массы $m$ и радиуса $R$ приводится в движение из состояния покоя посредством сматываемой с нее нити, расположенной под углом $\alpha$ к горизонту. К нити приложена постоянная сила $F$. Определить скорость центра масс катушки, когда он переместится на расстояние $s$. Момент инерции катушки относительно оси, проходящей через ее центр масс $C$ перпендикулярно плоскости материальной симметрии равен $J$. Коэффициент трения качения катушки $f$. Катушка катится без скольжения. Массой нити пренебречь. Радиус оси катушки, на которую намотана нить – $r$.




***Решение***:
Катушка является неизменяемой материальной системой, и сумма работ внутренних сил равна нулю. Поэтому по теореме об изменении кинетической энергии

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{n} A(F_k^{внеш})$$

На элементарном перемещении центра масс $\delta S$ работу совершают пара сил трения качения и сила $F$:

$$\delta A = \delta A_{тр.к.} + \delta A(F)$$

Элементарная работа пары трения качения

$$\delta A_{тр.к.} = -Nf\,\delta\varphi = -(mg - F\sin\alpha) f \frac{\delta S}{R}$$

Элементарная работа силы $F$

$$\delta A(F) = F\delta S\cos\alpha + Fr\delta\varphi = \frac{F}{R}(R\cos\alpha + r)\delta S$$

Таким образом:

$$\delta A = (F(R\cos\alpha + r) - (P - F\sin\alpha) f)\frac{\delta S}{R}$$

Проинтегрировав от нуля до s, получим:

$$A = (F(R\cos\alpha + r) - (P - F\sin\alpha) f)\frac{s}{R}$$

Изменение кинетической энергии катушки

$$T_2 - T_1 = T_2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{v_C^2}{2}(m + \frac{J}{R^2})$$

Окончательно

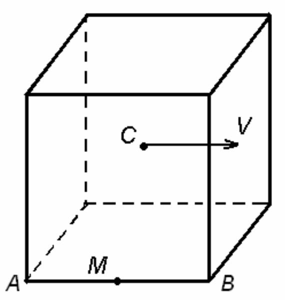
$$v_C = \sqrt{\frac{2sR}{mR^2 + J}(F(R\cos\alpha + r) - (P - F\sin\alpha) f)}$$

Из последней формулы видно, что катушка находится в движении, если

$$F > \frac{Pf}{R\cos\alpha + r + f\sin\alpha}$$

***Ответ***: $v_C = \sqrt{\dfrac{2sR}{mR^2 + J}(F(R\cos\alpha + r) - (P - F\sin\alpha) f)}$, $F > \dfrac{Pf}{R\cos\alpha + r + f\sin\alpha}$

**Задача Д-3** (8 баллов)




Во время межгалактического перелета американская астронавтка потеряла чемодан с инструментами. Чемодан массы *m* имеет форму куба и поступательно движется по инерции так, что скорость его центра масс коллинеарна ребру куба *AB* и равна *V*. Внеземной патруль, чудом избежавший столкновения с чемоданом, мгновенно закрепил в пространстве точку *M*, лежащую на середине ребра *AB*. Определить траекторию, а также величины скорости и ускорения центра масс чемодана при его дальнейшем движении. Длина $AB = a$. Куб считать однородным.

***Решение***: Момент сил удара при закреплении относительно точки *M* равен нулю, следовательно кинетический момент при закреплении не изменится и будет равен

$$K_M = MC \cdot mV = \frac{mVa}{\sqrt{2}}.$$

Эллипсоид инерции в точке *M* является эллипсоидом вращения, большая полуось которого направлена вдоль *CM*.

Поскольку вектор $\overline{K}_M \perp \overline{CM}$ и направлен вдоль одной из главных осей инерции, дальнейшее движение представляет собой вращение вокруг этого вектора с постоянной угловой скоростью. Таким образом, траектория центра масс куба является окружностью.

Найдем угловую скорость куба:

$$J_M = J_C + \frac{ma^2}{2} = \frac{1}{6}ma^2 + \frac{1}{2}ma^2 = \frac{2}{3}ma^2$$

$$K_M = J_M \cdot \omega \quad \Rightarrow \quad \frac{mVa}{\sqrt{2}} = \frac{2}{3}ma^2 \cdot \omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{3V}{2\sqrt{2}a}$$

Скорость центра масс после закрепления

$$V_C = \omega \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4}V$$

Ускорение центра масс

$$W_C = \frac{V_C^2}{a/\sqrt{2}} = \frac{9V^2}{8\sqrt{2}a}$$

***Ответ***: Точка C движется по окружности с центром в т. M и радиусом $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$, лежащей в плоскости векторов $\overline{V}$ *и* $\overline{CM}$. $V_C = \dfrac{3}{4}V$, $W_C = \dfrac{9V^2}{8\sqrt{2}a}$

**Задача Д-4 (10 баллов)**

Два плоских тела - диск и тонкое кольцо, изготовленные из одинакового материала, - лежат на шероховатой горизонтальной плоскости, не касаясь друг друга. В начальный момент им сообщается одинаковая угловая скорость. Линейные скорости центров масс в начальный момент равны нулю. Найти отношение радиусов тел, при котором их движение прекратится одновременно. Считать, что распределение нормальных контактных напряжений однородно.

***Решение***: Обозначим радиусы диска и кольца $R_д$ и $R_к$ соответственно. На каждый элемент $ds$ поверхности контакта движущихся тел действует сила трения пропорциональная нормальной реакции $dF_{тр} = f\frac{mg}{S}ds$, где $f$ – коэффициент трения, $mg$ – вес тела, $S$ – площадь пятна контакта.

Момент трения определяется выражением $M_{тр} = \int\limits_s rf_{тр}ds = \frac{mgf}{S}\int\limits_s rds$.

Для диска имеем $M_д = \frac{mgf}{\pi R^2}\int r \cdot rd\varphi dr = \frac{2}{3}mgfR_д$

Для кольца - $M_к = \frac{mgf}{2\pi R}\int R \cdot Rd\varphi = mgfR_k$.

Моменты трения постоянны и движение замедленное $\omega = \omega_o - \frac{M_{тр}}{J}t$, где $J_д = \frac{1}{2}mR_д^2$ – момент инерции диска, $J_k = mR_к^2$ – момент инерции кольца.

Поскольку время движения до остановки одинаково получаем $\frac{J_д}{M_д} = \frac{J_k}{M_k} \quad \to \quad \frac{3m_д R_д{}^2}{4m_д gfR_д} = \frac{m_k R_k{}^2}{m_k gfR_k}$ или $3R_д = 4R_k$.

***Ответ***: $3R_д = 4R_k$.