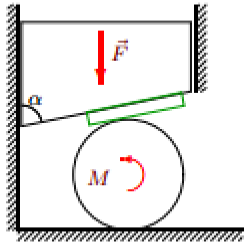
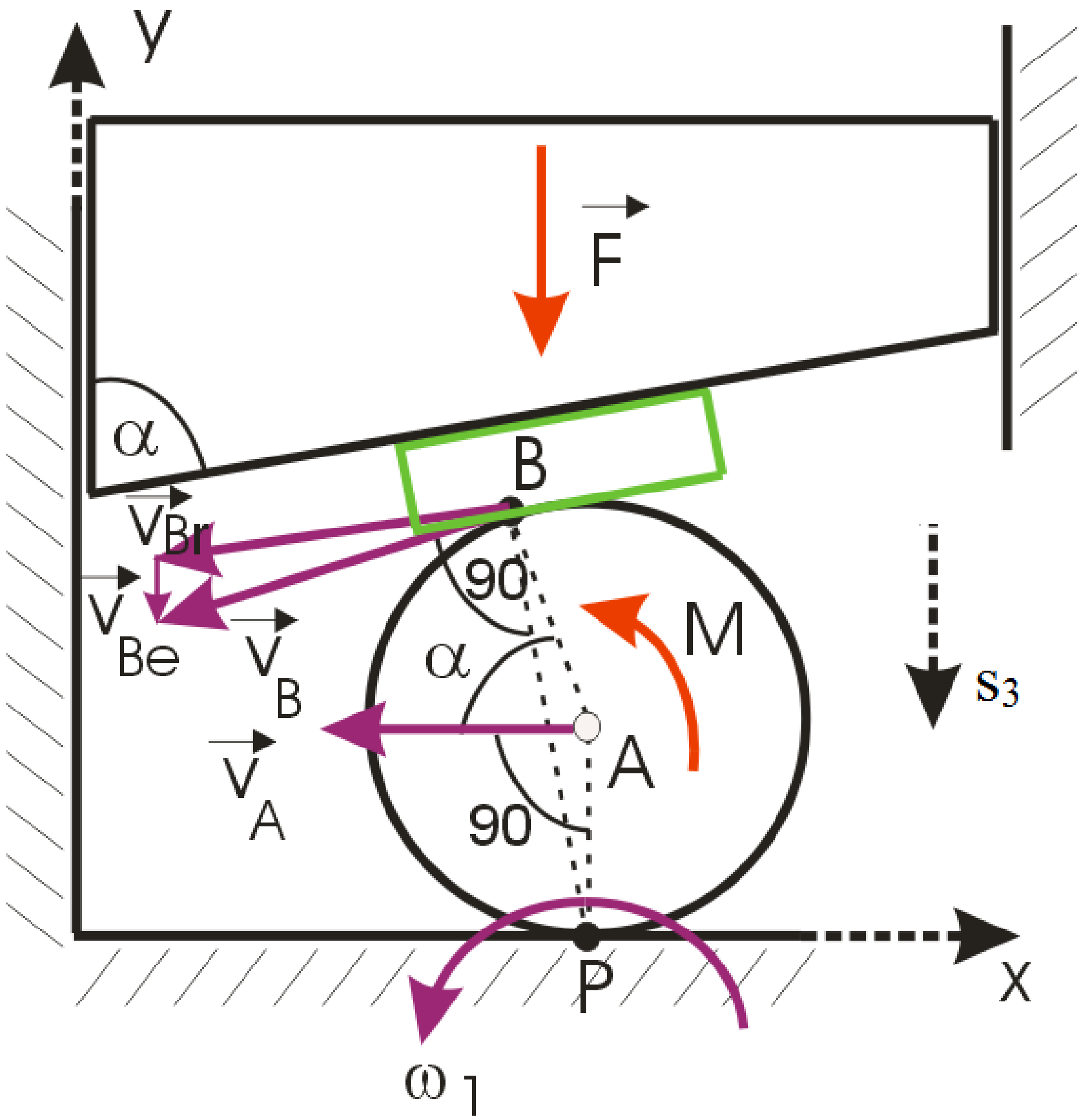
Задача D-13.21.

Парохин Антон

Между цилиндром радиусом $R = 1$ м и скошенным прессом (призмой) зажата пластина, скользящая по гладкой поверхности пресса, $\sin\alpha = 0.8$. Механизм расположен в горизонтальной плоскости. Масса пластины 2 кг, пресса — 1 кг. К прессу приложена сила $F = 57$ Н, к цилиндру — момент M =171 Нм. Найти ускорение пресса.





Найдём скорости точек A, B. Поскольку колесо катится без проскальзывания, то его МЦС находится в точке контакта с неподвижной поверхностью P. Для точки P:

$$v_{Px} = v_{Py} = 0\,.$$

Составим кинематический граф:

$$P \xrightarrow{\pi/2} A\,.$$

$$v_{ax} = v_{Px} - \omega_{1z} R \sin\frac{\pi}{2} = -\omega_{1z} R\ , \qquad \textbf{(1)}$$

$$v_{ay} = v_{Py} + \omega_{1z} R\cos\frac{\pi}{2} = 0\,. \qquad \textbf{(2)}$$

Составим кинематический граф:

$$A \xrightarrow{\pi-\alpha} B\,.$$

$$v_{bx} = v_{Ax} - \omega_{1z} R\sin(\pi-\alpha) = -\omega_{1z} R(1+\sin\alpha). \qquad \textbf{(3)}$$

$$v_{by} = v_{Ay} + \omega_{1z} R\cos(\pi-\alpha) = -\omega_{1z} R\cos\alpha\,. \qquad \textbf{(4)}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} v_B^2 &= v_{bx}^2 + v_{by}^2 = [\omega_{1z} R\ (1+\sin\alpha)]^2 + [\omega_{1z} R\cos\alpha]^2 = \\ &= \omega_{1z}^2 R^2\left(1 + 2\sin\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) = \omega_{1z}^2\, 2R^2(1+\sin\alpha) \end{aligned} \qquad \textbf{(5)}$$

Выберем за обобщённую координату перемещение пресса s_3 и направим её вниз. Точка В совершает сложное движение (движется по движущемуся прессу), поэтому её абсолютная скорость:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{Be} + \vec{v}_{Br}\,.$$

Проецируем на оси:

$$v_{bx} = -v_{Br}\sin\alpha$$

$$v_{by} = -v_{Br}\cos\alpha - v_{Be}$$

Откуда:

$$v_{by} = v_{bx} ctg\,\alpha - v_{Be} \Rightarrow v_{Be} = \dot{s}_3 = -v_{by} + v_{bx} ctg\,\alpha = \omega_{1z} R\cos\alpha - \omega_{1z} R\,ctg\,\alpha(1+\sin\alpha) = -\omega_{1z} R\,ctg\,\alpha$$

Тогда:

$$\omega_{1z} = -\frac{\dot{s}_3}{R\,ctg\,\alpha}\,. \qquad \textbf{(6)}$$

$$v_{ax} = -\frac{\dot{s}_3}{ctg\alpha}\,. \qquad \textbf{(7)}$$

$$v_B^2 = \frac{2\dot{s}_3^2(1+\sin\alpha)}{ctg^2\alpha}\,. \qquad \textbf{(8)}$$

Кинетическая энергия системы:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{m_1\dot{s}_3^2}{2} + \frac{m_2 v_B^2}{2} = \frac{1}{2}m_1\dot{s}_3^2 + \frac{1}{2}m_2\frac{2\dot{s}_3^2(1+\sin\alpha)}{ctg^2\alpha} = \frac{\dot{s}_3^2}{2}\left(m_1 + \frac{2m_2(1+\sin\alpha)}{ctg^2\alpha}\right).$$

Кинетическая энергия, выраженная через обобщённую скорость, будет иметь вид:

$$T = \frac{\dot{s}_3^2}{2}\cdot C\,,\ \text{где}\ C = m_1 + \frac{2m_2(1+\sin\alpha)}{ctg^2\alpha}\,. \qquad \textbf{(9)}$$

Подставляя значения, получаем **C=13,8**

Запишем обобщённую силу:

$$Q = \frac{1}{\dot{s}_3}\left(-F\cdot(-\dot{s}_3) + M\omega_1\right) = F - \frac{M}{R\cdot ctg\alpha} \qquad \textbf{(10)}$$

Подставляя значения, получаем **Q= -171**

Уравнение Лагранжа имеет вид:

$$\ddot{s}_3\, f(s_3) + \frac{\dot{s}_3^{\ 2}}{2} f'(s_3) = Q\,.$$

$$f'(s_3) = 0\,. \qquad \textbf{(11)}$$

В нашем случае:

$$\ddot{s}_3\left(m_1 + \frac{2m_2(1+\sin\alpha)}{ctg^2\alpha}\right) = F - \frac{M}{R\cdot ctg\alpha}\,. \qquad \textbf{(12)}$$

Откуда:

$$\ddot{s}_3 = \frac{F - \dfrac{M}{R\cdot ctg\alpha}}{m_1 + \dfrac{2m_2(1+\sin\alpha)}{ctg^2\alpha}}\,.$$

Недостающие величины:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-0{,}64} = 0{,}6\,.$$

$$\ddot{s}_3 = \frac{57 - \dfrac{171}{1\cdot 3/4}}{1 + \dfrac{2\cdot 2(1+0{,}8)}{9/16}} \approx -12{,}391\ м/с^2\,.$$

Ответ: $\ddot{s}_3 \approx -12{,}391\ м/с^2$.