ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ В РЕОЛОГИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Дементьева М.Ю., Кирсанов М.Н. (Воронеж)

Движение точки в упругой среде с переменной вязкостью описывается уравнением

$$\ddot{x} + b(t)\dot{x} + ax = 0. \tag{1}$$

Некоторый внешний источник (ускоритель) при $t = t_0$ возбуждает движение с заданными свойствами $x^{(m)} = x_m, \quad x^{(n)} = x_n$. При $m = 0$ и $n = 1$ получаем задачу Коши для уравнения (1). Случай $m = 0$ и $n \neq 1$ соответствует обобщенной задаче Коши с заданным начальным положением точки (возбуждается движение определенной точки). [1]

Начальное условие $m \neq 0$ и $n \neq 1$ означает действие ускорителя на ансамбль частиц, из которых только одна приходит в движение. Координату этой точки можно вычислить. Для сведения обобщенной задачи к задаче Коши необходимо N раз продифференцировать (1) по времени. Полученная система будет содержать $N + 3$ переменную x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$... x^{N+2}. Отнеся те две из них, которые заданы обобщенной задачей Коши $(x^{(m)}, x^{(n)})$, в правую часть, для оставшихся получим замкнутую алгебраическую систему линейных уравнений. Так как $b = b(t)$, то определитель системы $B_{m,n}$ зависит от времени. Например,

$$B_{1,3} = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 2\dot{b} + a & b & 1 \\ 0 & 3\ddot{b} & 3\dot{b} + a & b \end{vmatrix}.$$

Если система имеет решение, то обобщенная задача сводится к классической. Те значения времени, при которых определитель системы равен нулю, будут особыми точками поставленной задачи. При стремлении t_0 к особой точке, производные всех порядков, кроме заданных m и n, в начальный момент неограниченно растут. Если $m \neq 0$, $n \neq 0$, то растет и сама функция, что соответствует возбуждению бесконечно удаленной точки ансамбля.

При $m = 0, 1, 2$ замечено, что

$$B_{m,n} = \sum_{k=0}^{n-2} b^{(k)} C_{n-2}^{k} (-1)^k B_{m,b-k-1} - aB_{m,n-2},$$

$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Для неупругой среды ($a = 0$) задача может быть поставлена в скоростях $u = \dot{x}$. Соответствующие определители удовлетворяют формуле Родрига

$$B_n = \exp(A)(-1)^n \frac{d^n}{dt^n}(\exp(-A)),$$

$A = \int b(t)dt$. При $b = 2t$ функции B_n являются полиномами Эрмита.

[1] Кирсанов М.Н. Математические основы некоторых задач механики// Известия вузов. Строительство, 1996, N6, С.39-44.