РЕДУКЦИЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Кирсанов М.Н. (Воронеж)

Для линейного однородного дифференциального уравнения произвольного порядка выявляется условие, при котором возможна редукция. Метод основан на последовательном дифференцировании уравнения, в результате чего получается система линейных уравнений относительно функции и ее производных. Искомое условие следует из равенства нулю определителя системы. Для дифференциального уравнения с коэффициентами специального вида аналогичную процедуру использовал *Д.Митринович* [1,с.561].

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение порядка N

$$y^{(N)}h_N(t) + ... + y^{(i)}h_i(t) + ... + \ddot{y}h_2(t) + \dot{y}h_1(t) + yh_0 = 0.$$

h_0 =const. Последовательно дифференцируя уравнение $K-1$ раз, составим систему K уравнений, которую запишем в матричном виде $\mathbf{A}_K\vec{U} = 0$, где $\vec{U} = \{y, \dot{y}, \ddot{y}, \ldots, y^{(N+K-1)}\}$. Элементы матрицы a_{mn}, $(m = 1, 2, ..., K,\ n = 1, 2, ..., N+K)$ определяются по формуле $a_{mn} = a_{m-1\ n-1} + \dot{a}_{m-1\ n}$. Разделим матрицу A_K на две части, выделив из первых K столбцов квадратную матрицу $\mathbf{B}_K$, а последние столбцы объединив в матрицу $\mathbf{C}$. Система примет вид $\mathbf{B}_K\vec{V}_1 = -\mathbf{C}\vec{V}_2$, где $\vec{V}_1 = \{y, \dot{y}, \ddot{y}, \ldots, y^{(K-1)}\}$, $\vec{V}_2 = \{v, \dot{v}, \ddot{v}, \ldots, v^{(N-1)}\}$, $v = y^{(K)}$. Обозначим правую часть системы вектором $\vec{W} = -\mathbf{C}\vec{V}_2$. Окончательно имеем $\mathbf{B}_K\vec{V}_1 = \vec{W}$. Решение системы запишем по правилу Крамера

$$y^{(i)}\Delta_K = \Delta_{Ki}, \quad i = 0, 1, 2, ..., K-1, \tag{1}$$

где $\Delta_K = \det\mathbf{B}_K$, а Δ_{Ki} - определитель матрицы, полученной заменой i-го столбца матрицы $\mathbf{B}_K$ на вектор $\vec{W}$. Пусть Т – область изменения переменной t. Если для всех $t \in$ Т определитель системы Δ_K равен нулю, то для тех же t равна нулю и правая часть (1), представляющая собой линейное дифференциальное уравнение порядка $N-1$ для переменной $v = y^{(K)}$. Вид этого уравнения не зависит от i, так как определители Δ_{Ki} и Δ_{Kj} отличаются друг от друга только множителем $y^{(i)}/y^{(j)}$. Таким образом, равенство $\Delta_K = 0$ — условие редукции, а $\Delta_{Ki} = 0$ – уравнение порядка $N-1$.

В частности показано, что уравнение $s(t)y^{(3)} + f(t)\ddot{y} - ht\dot{y} + hy = 0$ может быть проинтегрировано в явном виде, если $s(t) = (ht^3/(k+1) - tf(t))/(k-1)$ при натуральном $k \geq 2$.

Получены точные решения уравнений, не содержащиеся в [1,2] и недоступные для системы **MAPLE V R4**.

Описанная процедура применима к некоторым нелинейным уравнениям, легко распространяется на неоднородные уравнения и тесно связана с постановкой обобщенной задачи Коши (с высшими производными в начальных условиях [3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Камке Е.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.

М.: Наука, 1976.
2. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Факториал, 1997.
3. Кирсанов М.Н. Математические основы некоторых задач механики// Строительство. - 1996.-N6.