УДК 624.04

М. Н. КИРСАНОВ, д-р физ.-мат. наук, проф.,
МЭИ(ТУ)

ОСОБЕННОСТИ АНАЛИТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

В системе Maple решаются задачи статики пространственных статически определимых упругих ферм. Приведен алгоритм расчета. Определяются оптимальные размеры и предельные деформационные характеристики конкретных ферм (трехлепестковый купол и бипирамида с произвольным числом граней). Найдены условия, при которых ферма становится кинематически изменяемой.

***Ключевые слова**: пространственные фермы, купол, бипирамида, оптимизация*

При расчете пространственных стержневых систем (ферм) используют или численные методы, в основном метод конечных элементов, или сводят пространственную систему к набору плоских ферм, раскладывая внешнюю нагрузку по плоскостям этих ферм. В последнем случае возможны аналитические решения, имеющие явные преимущества перед численными по точности, скорости счета, а главное, в возможности проследить закономерности работы системы, выявив характерные случаи нагружения или сочетания размеров и упругих или реологических свойств конструкции. Однако далеко не всегда удается выполнить указанное сведение задачи к расчету плоских ферм. Развитие методов символьной математики (Maple [1,2], Mathematica [3, 4] и др.) открыло возможность аналитического расчета конструкций, в том числе и стержневых систем. В настоящей работе изучаются пространственные статически определимые стержневые системы, работающие в упругой стадии. Даны примеры решения задач об определении напряженного состояния и прогибов. Показывается возможность оптимизации систем, определяются сочетания размеров системы, при которых статически определимая система становится кинематически изменяемой.

Алгоритм расчета

Усилия в стержнях будем определять методом вырезания узлов [1, 5]. Пусть x_j, y_j, z_j — координаты узлов (шарниров) фермы, j=1,..,m, где m — общее число узлов. Стержни фермы условно представим в виде векторов, для которых N_i — номер начала стержня, K_i — номер конца стержня i. Направления стержней выбираем произвольно, на решение задачи выбор направления не влияет. Проекции стержня: $l_{x,i} = x_{K_i} - x_{N_i}$, $l_{y,i} = y_{K_i} - y_{N_i}$, $l_{z,i} = z_{K_i} - z_{N_i}$. Матрица направляющих косинусов G размером $n \times n$, где n — число стержней фермы. Для всех стержней: $G_{3N_i-2,i} = l_{x,i}/l_i$, $G_{3N_i-1,i} = l_{y,i}/l_i$, $G_{3N_i,i} = l_{z,i}/l_i$ и для всех стержней, кроме опорных: $G_{3K_i-2,i} = -l_{x,i}/l_i$, $G_{3K_i-1,i} = -l_{y,i}/l_i$, $G_{3K_i,i} = -l_{z,i}/l_i$. Систему уравнений равновесия узлов представим в векторном виде

$$G\overline{S} = \overline{B}, \qquad (1)$$

где $\overline{S} = \{S_1, ..., S_n\}$ — вектор усилий в стержнях, $\overline{B} = \{P_{x,1}, P_{y,1}, P_{z,1}, ..., P_{x,m}, P_{y,m}, P_{z,m}\}$ — вектор правых частей (внешних нагрузок, приложенных к узлам). Система (1) состоит из уравнений равновесия узлов. Для каждого узла записываются три уравнения в проекциях на оси x, y и z.

Ферма

Рассмотрим ферму, состоящую из семи шарниров (A, C_i, B_i, $i = 1,...,3$), 18 стержней и трех опор (рис. 1). К вершине A приложена вертикальная сила P. В узле C_1 расположен сферический шарнир (он моделируется тремя взаимно перпендикулярными стержнями), в узле C_2 – цилиндрический, в узле C_3 – вертикальный опорный стержень. Основанием фермы является равносторонний шарнирно-стержневой треугольник $B_1B_2B_3$, вписанный в окружность радиуса r (рис. 2). Треугольники $C_1B_1B_2$, $C_2B_2B_3$, $C_3B_3B_1$ (лепестки фермы) равнобедренные, при этом вершины C_1, C_2, C_3 лежат на окружности радиуса R и расположены ниже основания (высота h, рис.3). Вершина фермы A лежит над центром основания на высоте H. Введем обозначения для усилий в стержнях (рис. 4) с учетом симметрии задачи. Усилия в стержнях основания – S, усилия в стержнях, составляющих стороны упомянутых равнобедренных треугольников – U (шесть стержней), в стержнях, идущих к вершине из узлов C_1, C_2, C_3 – O, из узлов B_1, B_2, B_3 – T.

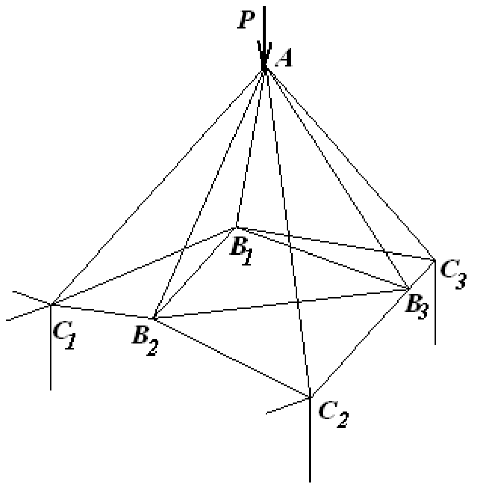

Рис. 1

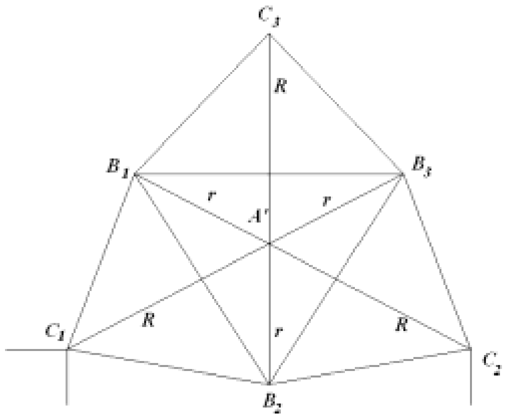

Рис. 2

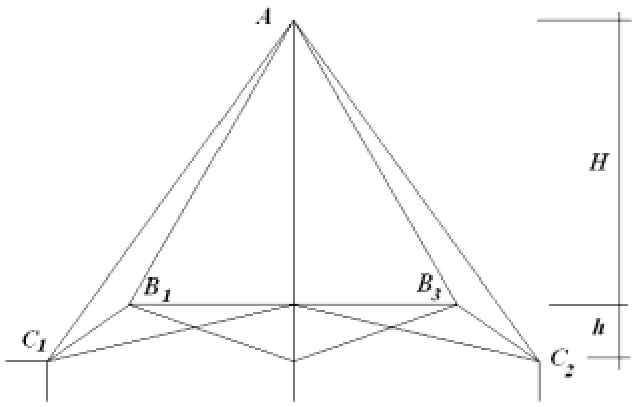

Рис. 3

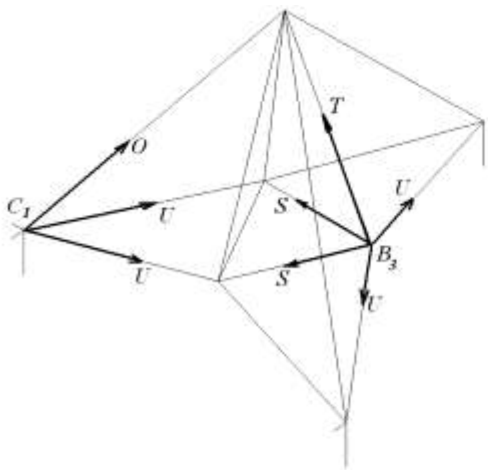

Рис. 4

Расчет

Все величины, имеющие размерность длины, отнесем к радиусу r: $R' = R/r,\quad H' = H/r,$ $h' = h/r$ и обозначим их теми же буквами, убрав временно поставленные штрихи. Решение системы уравнений, составленной по указанному выше алгоритму в системе Maple, не занимает много времени и дает следующие усилия в стержнях от действия единичной вертикальной нагрузки в вершине A:

$$S = \frac{l_S R(HR - 2h_0)}{3Hd},\quad T = \frac{2hRl_T}{Hd},\quad U = \frac{Rl_U}{d},\ O = -\frac{(2R-1)l_O}{d}, \tag{2}$$

где $l_S = \sqrt{3},\ l_T = \sqrt{H^2+1},\ l_U = \sqrt{R^2+h^2+1-R},\ \ l_O = \sqrt{R^2+h_0^2}$ — безразмерные длины стержней; $h_0 = H + h$ — полная высота фермы. Определитель матрицы системы уравнений метода вырезания узлов имеет вид

$$d = 3(2HR - h_0). \tag{3}$$

Анализируя (3) замечаем, что при $h = 2HR - H$ система становится кинематически изменяемой. Это возможно, например, при $R=1,\ h=H$ или $R=2,\ h=3H$. Таким образом, аналитический расчет может предупредить конструктора о неудачных сочетаниях размеров системы, приводящих или к кинематической изменяемости при $d=0$ или к неоправданному повышению усилий в стержнях при $d \to 0$. Кроме этого, аналитический расчет может подсказать оптимальные размеры системы, при которых прогиб, например, будет наименьший. Вычислим прогиб вершины от действия единичной силы *P*. По формуле Максвелла-Мора имеем в общем случае

$$\Delta_A = \frac{1}{d^2EF}\left(\frac{l_S^3R^2(HR-2h_0)^2}{9H^2} + \frac{4h^2R^2l_T^3}{H^2} + Rl_U^3 + (2R-1)^2 l_O^3\right), \tag{4}$$

При $h=0$ имеем выражение

$$\Delta_A = \frac{3(2R-1)^2(R^2+H^2)^{3/2} + 6R^2(R^2-R+1)^{3/2} + R^2\sqrt{3}(R^2-4R+4)}{9H^2(2R-1)^2EF}.$$

Графики зависимости (4) при $R = 2$, $EF = 1$ имеют явные минимумы (рис. 5):

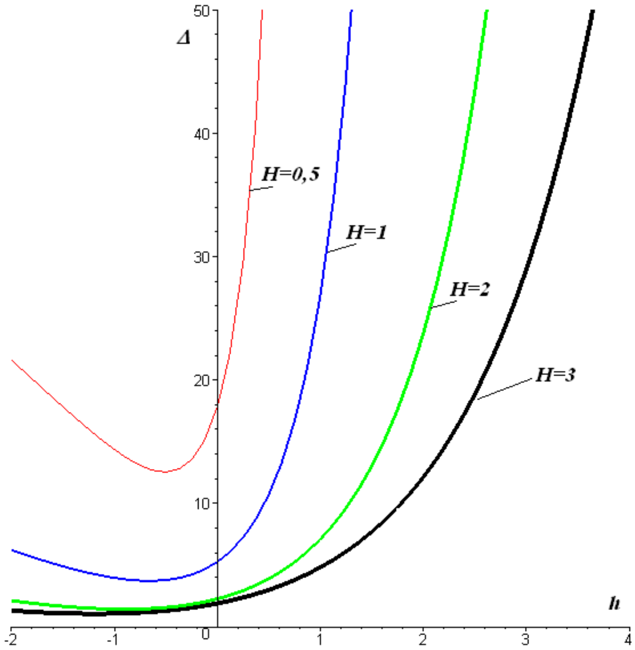

Рис. 5

Менее выражены минимумы при *h*=0, *EF*=1 (плоское основание, рис. 6):

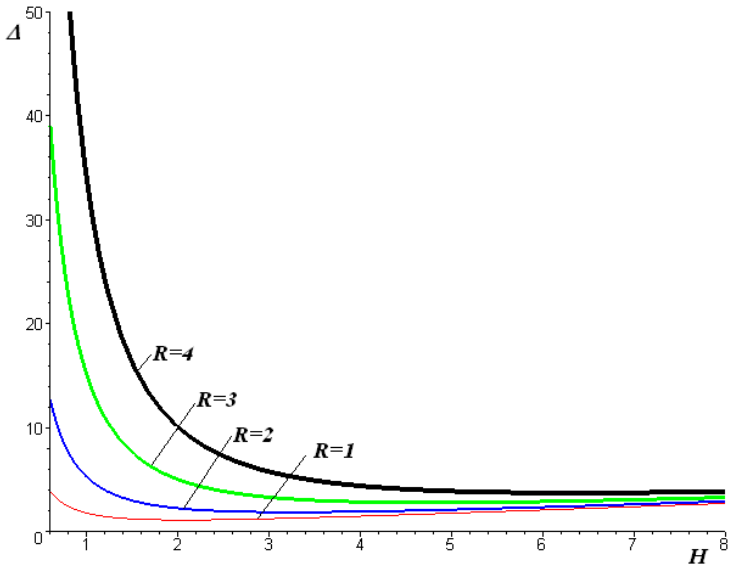

Рис. 6

Для конструктора наиболее интересны сильно выраженные экстремумы. Небольшая погрешность в выборе размеров около этих точек приводит к значительной разности в прогибах. На рисунке 5 — это кривая при *H*=0.5 (малая высота фермы).

Несмотря на достаточно громоздкий вид формулы (4), особенно если туда подставить значения длин, возможен аналитический поиск минимума по одной из трех переменных. Система Maple легко вычисляет производную и дает уравнение для экстремальных характеристик. Например, из равенства $\partial\Delta_A / \partial H = 0$ при $h = 0,\ R = 2$ следует уравнение

$$3H^4 - 12H^2 - 16\sqrt{12 + 3H^2} - 96 = 0.$$

Это уравнение имеет решение в радикалах. Численное значение корня $H = 3{,}23$. Аналогично можно получить точное решение и при других размерах фермы.

Исследованная ферма может быть использована как купольное покрытие какого-либо сооружения или как декоративный элемент. Для практического использования эту ферму следует оснастить шпренгельными решетками, не допуская длинных сжатых элементов. Аналитические условия появления сжатых стержней легко выявить из анализа знаков усилий (2).

Бипирамида

Рассмотрим стержневую систему, имеющую форму бипирамиды, в основании которой лежит правильный n-угольник (рис. 7 — тригональная бипирамида, рис. 8 — дитетрагональная бипирамида). Ферма содержит $n + 2$ шарниров и $3n$ стержней одинаковой жесткости EF. На примере этой системы покажем, как в регулярных стержневых системах, обладающих некоторой закономерностью организации (например, симметрия) аналитическими методами можно выявить характерные зависимости и особенности, полезные для оценки предельных возможностей и для оптимизации их работы.

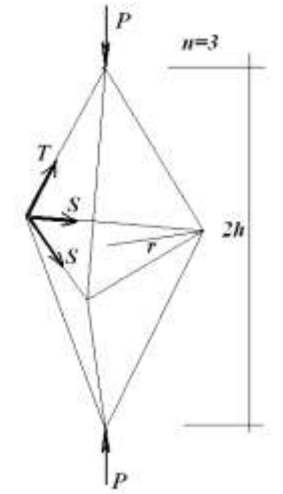

Рис. 7

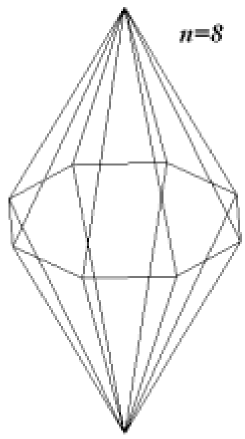

Рис. 8

Система статически определима при любом n, так как для равновесия шарниров надо составить $3n$+6 уравнения, содержащие $3n$+6 неизвестных усилий в стержнях, включая шесть опорных (не изображены). Основанием конструкции является правильный многоугольник, вписанный в окружность радиуса r. Обе вершины бипирамиды проецируются в центр основания и расположены на расстоянии h от него, ребра — стрежни с шарнирами по концам. Ферма сжата вертикальными силами P. В дальнейшем предполагаем, что все величины размерности длины отнесены к радиусу r, и P=1. Найдем усилия в стержнях. Методом вырезания узлов (Maple здесь не потребуется) определяем

$$S = -1/(nh\sin\varphi), \quad T = \sqrt{1+h^2}\,/(nh),$$

где $\varphi = \pi / n$. Длины соответствующих стержней $l_S = 2\sin\varphi,\ l_T = \sqrt{1+h^2}$. По формуле Максвелла-Мора получаем прогиб

$$\Delta = n(2T^2 l_T + S^2 l_S)/EF = \frac{2((h^2+1)^{3/2}\sin\varphi + 1)}{EF\, nh^2 \sin\varphi}. \tag{4}$$

Приравнивая производную прогиба по h нулю, получаем уравнение для оптимальной высоты бипирамиды

$$(h^4 - h^2 - 2)\sin\varphi - 2\sqrt{h^2+1} = 0.$$

Это уравнение имеет точное решение $h = \sqrt{\operatorname{tg}^{2/3}(\varphi/2) + \operatorname{tg}^{-2/3}(\varphi/2) + 1}$, справедливое для любого числа n. С увеличением n оптимальная высота медленно растет. При n = 3 имеем h = 1,77, при n = 11 имеем h = 2,22. Прогиб же с увеличением числа граней при заданной высоте имеет предел, который легко вычислить из (4): $\lim_{n\to\infty} \Delta = 2/(EF\pi h^2)$.

Выводы

Применение аналитических методов в статике стержневых систем позволяет выявить характерные особенности конструкции, предусмотреть исключительные случаи, когда во внешне благополучной ферме при определенном сочетании параметров усилия в стержнях неограниченно растут или конструкция становится изменяемой. В других случаях можно найти оптимальные размеры для повышения жесткости системы или найти предельные ее свойства. Конечно, в ряде случаев эти же результаты получаются и в численных расчетах, однако, во-первых, это возможно далеко не всегда, а во-вторых, точность и достоверность часто неудовлетворительны. Это легко проследить, например, и в решениях приведенных здесь задач в системе Maple по указанному алгоритму. Достаточно задать числовые значения размерам (в десятичной форме, например $h = 2.0$, а не $h=2$) и попытаться изменить точность счета, меняя значение величины Digits, которая в Maple отвечает именно за это. Если для небольшого числа стержней это мало отражается на результате, то с увеличением порядка системы уравнений равновесия влияние Digits уже существенно, особенно для пологих ферм (h мало). С другой стороны, могущество систем аналитических вычислений нельзя переоценивать. Так, если в первом примере (18 стержней) решение получено в символьной и достаточно компактной форме, то вторая задача о бипирамиде, где основной целью являлось исследование при различных n, результат был получен вручную. Связано это с тем, что выявить зависимость решения от n можно проанализировав некоторую последовательность ответов, по которым, используя возможности Maple для решения рекуррентных уравнений уже получается общая формула [6]. Однако уже при $n = 5$ система Maple начинала давать сбои, пытаясь как-то упростить тригонометрические функции угла $\pi/5$, а после $n = 12$ вообще отказывалась решать либо ссылаясь на недостаток памяти, либо затягивая решение на неопределенное время. Справиться отчасти с такими трудностями можно, выбрав правильную форму для упрощения и преобразования результатов (операторы simplify, combine и др.) и метод решения систем линейных уравнений (пакет LinearAlgebra [1]), используя, например свойства симметрии задачи. Так, напряженное состояние в рассмотренной бипирамиде с произвольным числом граней всегда характеризуется только двумя усилиями — стержни основания имеют усилия S, стержни меридионального направления — T.

Литература

1. *Кирсанов М. Н.* Практика программирования в системе Maple. — М.: Издательский дом МЭИ, 2011. — 208 с.
2. *Матросов А. В*. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. — СПб.: БХВ - Петербург, 2001. — 526 с.
3. *Дьяконов В.П.* Mathematica 5/6/7. Полное руководство. — М.: ДМК, 2009. — 624 с.
4. *Кристалинский Р. Е., Шапошников Н. Н.* Решение вариационных задач строительной механики в системе Mathematica. — СПб.: Лань, 2010. —240 с.
5. *Кирсанов М.Н.* Генетический алгоритм оптимизации стержневых систем// Строительная механика и расчет сооружений. №2, 2010, с. 60-63.
6. *Кирсанов М. Н., Кленова И. Г.* Индуктивный метод исследования колебаний систем с периодической структурой//Всероссийской научно-практической конференции. "Математика, информатика, естествознание в экономике и обществе". МФЮА. 16-17.11.09 г. Москва с. 112-113.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 09-01-00756-а, 09-08-01184-а).

MN Kirsanov, Dr. Sci. Sciences, prof.,
MPEI (TU)

FEATURES OF THE ANALYTICAL CALCULATION OF SPACE BAR SYSTEMS

The problems of statics of the space trusses are solved using the system Maple.
The algorithm of calculation is given. The optimum size and limit the strain-specific characteristics of real trusses (threefold dome and bipyramid) are detected. The conditions under which the truss is kinematically variable are given.

Key words: spatial trusses, bipyramid, optimization

Реферат

В системе Maple решаются задачи статики пространственных статически определимых упругих ферм. Приведен алгоритм расчета. Определяются оптимальные размеры и предельные деформационные характеристики конкретных ферм (трехлепестковый купол и бипирамида с произвольным числом граней). Найдены условия, при которых ферма становится кинематически изменяемой.