

М.Н.Кирсанов

ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ПЛОСКОЙ БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ

Методом индукции в системе компьютерной математики Maple выводится формула для прогиба фермы под действием равномерной и сосредоточенной нагрузки, определяется зависимость смещения подвижной опоры от числа панелей, размеров фермы и нагрузки.

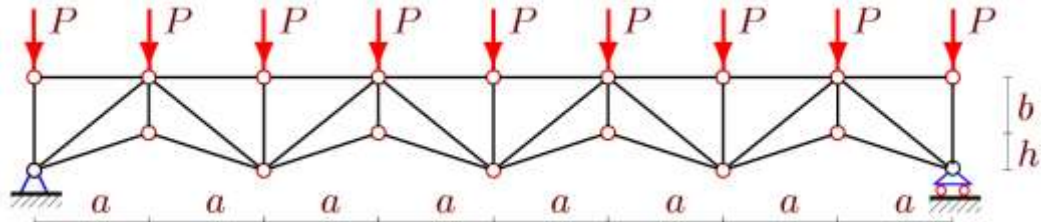


Рис. 1. Ферма при $n=4$

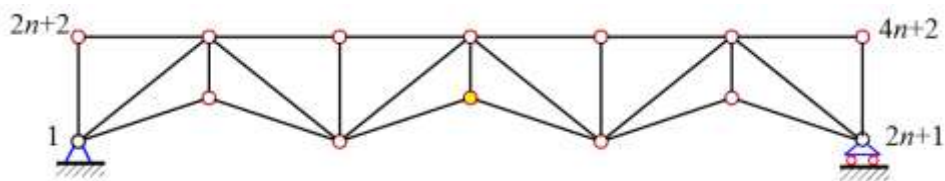


Рис. 2. Нумерация узлов фермы ($n=3$)

Для расчета усилий в стержнях методом вырезания узлов составим систему уравнений равновесия всех узлов в проекциях на оси координат. Начало координат выберем в левой неподвижной опоре. Программа расчета составляется на языке Maple [1]. Для n панелей число стержней – $n_s = 8n + 4$, включая три опорные стержня. Число шарниров вместе с тремя шарнирами, закрепленными на основании, $m = 4n + 5$. Зададим координаты узлов, по которым можно будет определить направляющие косинусы усилий, входящие в уравнения равновесия:

$$x_i = a(i - 1), y_i = h(1 + (-1)^i) / 2,$$

$$x_{i+2n+1} = x_i, y_{i+2n+1} = b + h, i = 1, \dots, 2n + 1,$$

Координаты опорных точек:

$$x_{m-2} = -2, y_{m-2} = 0,$$

$$x_{m-1} = 0, y_{m-1} = -1,$$

$$x_m = x_{2n+1}, y_m = -1.$$

Структуру соединения узлов и стержней фермы зададим условными векторами $\bar{V}_i, i = 1, \dots, n_s$. Здесь первая компонента – номер шарнира фермы в начале соответствующего стержня, вторая – номер шарнира в его конце. Выбор направления условных векторов-стержней не связан со знаком усилий в них и на результат не влияет. Имеем следующие векторы:

$$\bar{V}_i = [i, i+1], \quad \bar{V}_{i+2n} = [i+2n+1, i+2n+2], \quad i = 1, \dots, 2n,$$

$$\bar{V}_{i+4n} = [i, i+2n+1], \quad i = 1, \dots, 2n+1,$$

$$\bar{V}_{i+6n+1} = [2i-1, 2(i+n)+1],$$

$$\bar{V}_{i+7n+1} = [2i+1, 2(i+n)+1], \quad i = 1, \dots, n,$$

Опорным стержням соответствуют следующие векторы:

$$\bar{V}_{n_s-2} = [1, m-2], \quad \bar{V}_{n_s-1} = [1, m-1], \quad \bar{V}_{n_s} = [2n+1, m].$$

Длины стержней и проекции векторных представлений этих стержней необходимы для вычисления направляющих косинусов:

$$l_i = \sqrt{l_{1,i}^2 + l_{2,i}^2}, \quad l_{1,i} = x_{V_{2,i}} - x_{V_{1,i}}, \quad l_{2,i} = y_{V_{2,i}} - y_{V_{1,i}}, \quad i = 1, \dots, n_s.$$

Первый индекс в номере $V_{j,i}$ принимает значения 1 или 2 и соответствует номеру компоненты вектора \bar{V}_i , второй – номеру стержня. Матрица направляющих косинусов \mathbf{G} имеет следующие элементы

$$G_{k,i} = -l_{j,i} / l_i, \quad k = 2V_{i,2} - 2 + j, \quad k \leq n_s, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, \dots, n_s,$$

$$G_{k,i} = l_{j,i} / l_i, \quad k = 2V_{i,1} - 2 + j, \quad k \leq n_s, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, \dots, n_s.$$

Усилия находим из решения системы уравнений

$$\mathbf{G}\bar{S} = \bar{B}, \quad (1)$$

где $\bar{S} = \{S_1, \dots, S_{n_s}\}$ — вектор усилий в стержнях, $\bar{B} = \{P_{x,1}, P_{y,1}, \dots, P_{x,n_s}, P_{y,n_s}\}$ — вектор правых частей (внешних нагрузок, приложенных к узлам). Для расчета прогиба фермы используем формулу Максвелла – Мора, выделив составляющую Δ_1 прогиба за счет деформации стержней нижнего пояса, Δ_2 — верхнего пояса, Δ_3 — стоек и Δ_4 — раскосов решетки. Соответствующие номера имеют и площади сечений стержней:

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 =$$

$$= P \sum_{i=1}^{2n} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF_1) + \sum_{i=2n+1}^{4n} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF_2) + \sum_{i=4n+1}^{6n+1} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF_3) + \sum_{i=6n+2}^{n_s-3} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF_4).$$

Здесь использованы стандартные обозначения $S_i^{(1)}$ для усилий от единичной силы, приложенной к середине нижнего пояса (узел $n+1$, рис. 2), $S_i^{(P)}$ — усилия в стержнях от заданной нагрузки, и длины стержней l_i . Жесткости стержней EF в общем случае разные.

$$\Phi = (10n^4 + 2n^2(1 - 3(-1)^n) + 3(1 - (-1)^n)) / (24b),$$

$$\Delta_1 EF_1 / P = c^3 \Phi / (2b),$$

$$\Delta_2 EF_2 / P = c^3 (10n^4 + 2n^2(1 + 3(-1)^n) - 3(1 - (-1)^n)) / (48(b+h)^2),$$

$$\Delta_3 EF_3 / P = h^2 \Phi - n^2 h ((-1)^n - 1) / 2,$$

$$\Delta_4 EF_4 / P = g^3 (bh^2 \Phi + n^2 b^2 + bh(2n^2(2 - (-1)^n) - (-1)^n + 1)) / 4 / (2b^2(b+h)^2),$$

$$c = \sqrt{a^2 + h^2}, \quad g = \sqrt{a^2 + (b+h)^2}.$$

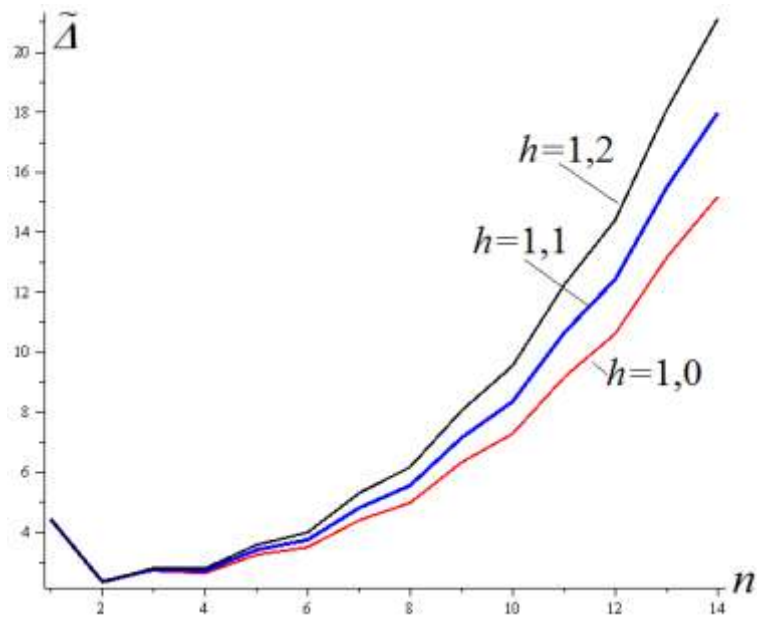


Рис. 3. $L=30$ м

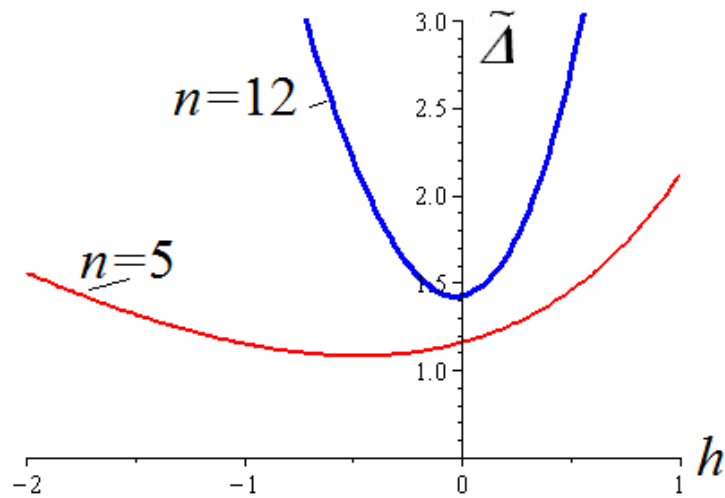


Рис. 4. $L=30$ м, $H=b+h=5$ м

Библиографический список

1. Кирсанов М. Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
2. Кирсанов М.Н. Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях типовой фермы «Молодечно» с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 33–41.

3. Тиньков Д. В. Анализ влияния условий закрепления на прогиб плоской балочной фермы с нисходящими раскосами// Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. Т. 1. 2015. С. 52-56.
4. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.
5. Ахмедова Е. Р. Аналитический расчет прогиба плоской фермы со шпренгельной решеткой// Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. Т. 1. С. 62-65.