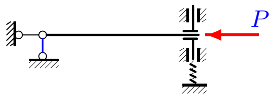
Тема 10. Устойчивость стержня на упругих опорах.

Прямолинейный стержень длиной l, закрепленный на одном конце в упругой опоре, сжимается продольной силой P. Задана относительная жесткость для линейного смещения Δy опоры $a = \frac{EJ}{c_1 l^3} = 0.129$, где c_1 — жесткость пружины. Определить коэффициент μ приведения длины стержня.



$$a = 0.129 \tag{1}$$

Решение: Выписываем решение дифференциального уравнения прогиба прямолинейного стержня

$$w(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx) + Cx + D, \tag{2}$$

где $k = \sqrt{\dfrac{P}{EJ}}$, а A, B, C и D – произвольные постоянные определяемые из условий на концах стержня. Сформулируем эти условия в виде системы уравнений

$$\begin{cases} w(0) = 0, \\ w''(0) = 0, \\ w'(l) = 0, \\ EJw'''(l) + Pw'(l) = c_1 w(l). \end{cases} \tag{3}$$

Заметим, что последнее уравнение системы можно переписать в виде, используя заданное в условии задачи выражение для c_1

$$w'''(l) + k^2 w'(l) = \frac{a}{l^3} w(l).$$

Итак, сначала выпишем (для удобства) выражения для первых трех производных от (2)

$$\begin{cases} w'(x) = -Ak\cos(kx) - Bk\cos(kx) + C, \\ w''(x) = -Ak^2\sin(kx) - Bk^2\sin(kx), \\ w'''(x) = -Ak^3\cos(kx) + Bk^3\cos(kx). \end{cases}$$

Далее, из первых двух уравнений в (3) находим, что B=D=0, а расписывая последние два – получаем следующее соотношение

$$\frac{C}{A} = -k\cos(kl) = \frac{1}{al} \cdot \frac{\sin(kl)}{(kl)^2 - 1/a}.$$

Откуда, вводя новую переменную $\xi = kl$, получаем нелинейное уравнение для определения ξ:

$$\mathrm{tg}(\xi) = -\xi(a\xi^2 - 1).$$

Решая последнее численно при условии (1), находим[1] $\xi_0 \cong 2.9001$ и, окончательно, $\mu = \frac{\pi}{\xi_0} \cong 1.0833$.

Ответ: $\mu = 1.0833$.

[1] например, в MATLAB одной командой $>> fzero('tan(x) + x * (0.129 * x^2 - 1)', -3)$.