

Тема 4. Условие стабильности процесса на плоскости.

Вариант 5. Динамический процесс описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} 7\ddot{x} + \dot{x}x + 2\dot{y}y + 3\dot{y}^2 + 3x^2 + 5x^2 = 0, \\ \ddot{x} - 2\dot{y} - 2\sin(5\dot{x} + 4\dot{y}) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Найти условие неустойчивости порядка $(0/2)$. Вывести уравнение кривой неустойчивости при

$$\dot{x}_0 = 2 \text{ и } \dot{y}_0 = 0. \quad (2)$$

Решение: придадим функциям $x(t)$ и $y(t)$, скоростям $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$ и ускорениям $\ddot{x}(t)$ и $\ddot{y}(t)$ малые независимые приращения $\Delta x, \Delta y, \Delta \dot{x}, \Delta \dot{y}, \Delta \ddot{x}$ и $\Delta \ddot{y}$ и, линеаризуя полученную систему относительно указанных приращений, получим

$$\begin{cases} (\dot{x} + 10x)\Delta x + (7\dot{x} + 6\dot{x} + x)\Delta \dot{x} + 7\dot{x}\Delta \ddot{x} + 2\dot{y}\Delta y + (6\dot{y} + 2y)\Delta \dot{y} = 0, \\ \ddot{x} - 2\dot{y} - 2\cos(5\dot{x} + 4\dot{y})(5\Delta \dot{x} + 4\Delta \dot{y}) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Находим матрицу системы относительно $\Delta \dot{x}$ и $\Delta \dot{y}$, поскольку в нашей задаче условие неустойчивости порядка $(0/2)$

$$\begin{bmatrix} 7\dot{x} + 6\dot{x} + x & 6\dot{y} + 2y \\ -10\cos(5\dot{x} + 4\dot{y}) & -8\cos(5\dot{x} + 4\dot{y}) = 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\Delta x, \Delta \ddot{x}) \\ f_2(\Delta y, \Delta \ddot{y}) \end{bmatrix}.$$

Приравнивая к нулю определитель полученной матрицы, записываем искомое условие неустойчивости

$$\begin{aligned} F(x, y, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \ddot{x}) &= \begin{vmatrix} 7\dot{x} + 6\dot{x}_0 + x & 6\dot{y}_0 + 2y \\ -10\cos(5\dot{x}_0 + 4\dot{y}_0) & -8\cos(5\dot{x}_0 + 4\dot{y}_0) = 0 \end{vmatrix} = \\ &= -4\cos(10)(14\dot{x} + 2x + 5y + 24) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Ускорение \ddot{x} выражаем из первого уравнения системы (3), используя (2)

$$\ddot{x} = -\frac{1}{14}(5x^2 + 2x + 12).$$

Подставляя в условие неустойчивости (4), получим $y = -x^2 + \frac{12}{5}$ или в каноническом виде $\tilde{y} = -\tilde{x}^2$, где $\tilde{y} = y - \frac{12}{5}$, $\tilde{x} = x$.

Ответ:

1. Условие неустойчивости имеет вид: $-5x^2 + 5y + 12 = 0$.
2. Уравнение кривой неустойчивости в каноническом виде: $y = 2px^2$ (парабола с $p = -\frac{1}{2}$).