

Глава 2

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕЧЕНИЙ

2.1. Сечение из прокатного профиля

Постановка задачи. Найти максимальный и минимальный моменты инерции сечения, составленного из n прокатных профилей.

План решения

1. Вводим систему координат. Определяем координаты центров тяжести фигур, составляющих сечение.

2. Вычисляем площадь всего сечения

$$F = \sum_{i=1}^n F_i, \quad (2.1)$$

где F_i — площади фигур.

3. Определяем координаты центра тяжести

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{F}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{F}, \quad (2.2)$$

где x_i, y_i — координаты центров тяжести фигур.

4. Определяем осевые J_{x_c}, J_{y_c} и центробежный $J_{x_y c}$ моменты инерции относительно центральных осей

$$\begin{aligned} J_{x_c} &= \sum_{i=1}^n (J_{x c_i} + (y_c - y_i)^2 F_i), \\ J_{y_c} &= \sum_{i=1}^n (J_{y c_i} + (x_c - x_i)^2 F_i), \\ J_{x_y c} &= \sum_{i=1}^n (J_{x y_i} + (x_c - x_i)(y_c - y_i) F_i), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $J_{x c_i}, J_{y c_i}, J_{x y c_i}$ — осевые и центробежные моменты инерции фигур относительно их собственных центральных осей.

5. Находим главные (максимальный и минимальный) моменты инерции:

$$J_{max,min} = \frac{J_{yc} + J_{xc}}{2} \pm \sqrt{\frac{(J_{yc} - J_{xc})^2}{4} + J_{xyc}^2}. \quad (2.4)$$

6. Вычисляем главные радиусы инерции:

$$i_{max} = \sqrt{J_{max}/F}, \quad i_{min} = \sqrt{J_{min}/F}. \quad (2.5)$$

7. Находим направление главных осей

$$\operatorname{tg} \alpha_{max} = \frac{J_{xy}}{J_{yc} - J_{max}}, \quad (2.6)$$

где α_{max} — угол между осью x и осью, относительно которой момент инерции максимальный. Положительный угол отсчитывается против часовой стрелки.

Замечание 1. В качестве проверки можно сначала вычислить моменты инерции относительно заданных осей

$$\begin{aligned} J_x &= \sum_i (J_{x_i} + y_i^2 F_i), \\ J_y &= \sum_i (J_{y_i} + x_i^2 F_i), \\ J_{xy} &= \sum_i (J_{xy_i} + x_i y_i F_i), \end{aligned} \quad (2.7)$$

а затем уже пересчитать результаты относительно центральных осей. Центральные моменты инерции имеют вид

$$\begin{aligned} J_{xc} &= J_x - y_c^2 F, \\ J_{yc} &= J_y - x_c^2 F, \\ J_{xyc} &= J_{xy} - x_c y_c F. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Замечание 2. В тех случаях, когда для уголков в сортаменте не указан центробежный момент инерции J_{xy} , его легко вычислить по формуле (2.4), из которой в случае *равнополочных* уголков $J_{xc} = J_{yc}$ следует $J_{xy} = J_{max} - J_{xc}$.

Пример. Найти максимальный и минимальный моменты инерции фигуры, составленной из швеллера 18а, ГОСТ 8240-89, и уголка №6.3/4, ГОСТ 8509-86 (рис. 12).

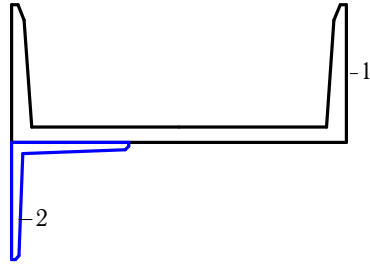


Рис. 12

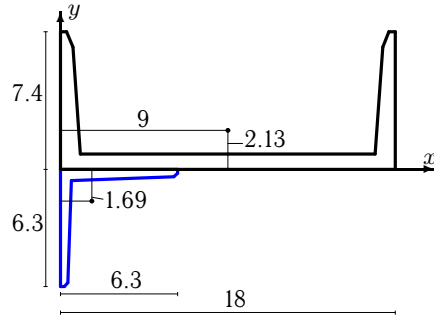


Рис. 13

Решение

1. Вводим систему координат. Определяем координаты центров тяжести фигур, составляющих сечение (рис. 13). Согласно табл.5, с. 302 (строка выделена полужирным шрифтом) имеем:

Фигура 1 (швеллер №18а), $x_1 = 9$ см, $y_1 = 2.3$ см. Здесь $y_1 = z_0$, $x_1 = h/2$, где h — стандартное обозначение для высоты швеллера, z_0 — расстояние до центра тяжести.

Фигура 2 (уголок №6.3/4), согласно табл. 6, с. 303, имеем $x_2 = 1.69$ см, $y_2 = -1.69$ см.

2. Вычисляем площадь всей фигуры. Площадь швеллера 22.2 см², уголка — 4.96 см²:

$$F = \sum_i F_i = 22.2 + 4.96 = 27.16 \text{ см}^2.$$

3. Определяем координаты центра тяжести по формуле (2.2):

$$x_c = \frac{\sum_i F_i x_i}{F} = \frac{22.2 \cdot 9 + 4.96 \cdot 1.69}{27.16} = 7.67 \text{ см},$$

$$y_c = \frac{\sum_i F_i y_i}{F} = \frac{22.2 \cdot 2.13 - 4.96 \cdot 1.69}{27.16} = 1.43 \text{ см}.$$

4. Определяем осевые J_{xc} , J_{yc} и центробежный J_{xyc} моменты инерции сечения относительно центральных осей

$$J_{xc} = \sum_{i=1}^2 (J_{xc_i} + (y_c - y_i)^2 F_i) = 105 + 22.2 \cdot (2.13 - 1.43)^2 + 18.9 + 4.96 \cdot (1.69 + 1.43)^2 = 183.06 \text{ см}^4,$$

$$J_{yc} = \sum_{i=1}^2 (J_{yc_i} + (x_c - x_i)^2 F_i) = 1190 + 22.2 \cdot (9 - 7.67)^2 + 18.9 + 4.96 \cdot (1.69 - 7.67)^2 = 1425.54 \text{ см}^4,$$

$$J_{xyc} = \sum_{i=1}^2 (J_{xy_i} + (x_c - x_i)(y_c - y_i) F_i) = 22.2 \cdot (9 - 7.67) \cdot (2.13 - 1.43) + 11 + 4.96 \cdot (1.69 - 7.67) \cdot (-1.69 - 1.43) = 124.21 \text{ см}^4.$$

5. Находим главные моменты инерции:

$$J_{max,min} = \frac{J_{yc} + J_{xc}}{2} \pm \sqrt{\frac{(J_{yc} - J_{xc})^2}{4} + J_{xyc}^2} = 804.3 \pm 633.54.$$

$$J_{max} = 1437.84 \text{ см}^4, \quad J_{min} = 170.76 \text{ см}^4.$$

6. Вычисляем главные радиусы инерции:

$$i_{max} = \sqrt{J_{max}/F} = \sqrt{1437.84/27.16} = 1.39 \text{ см},$$

$$i_{min} = \sqrt{J_{min}/F} = \sqrt{170.76/27.16} = 0.48 \text{ см}.$$

7. Находим направление главных осей

$$\operatorname{tg} \alpha_{max} = \frac{J_{xyc}}{J_{yc} - J_{max}} = \frac{124.21}{1425.54 - 1437.84} = -10.10,$$

$$\alpha_{max} = \arctan(-10.10) = -1.47 = -84^\circ.$$

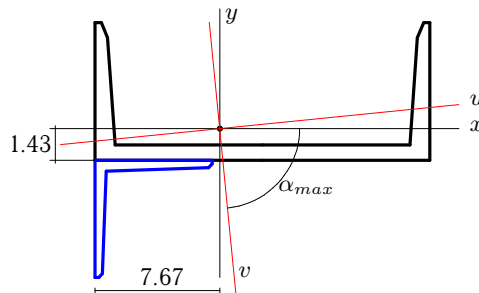


Рис. 14