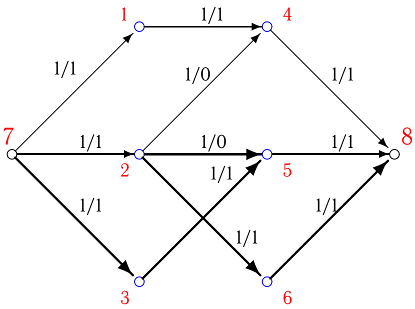

Рис. 4.24

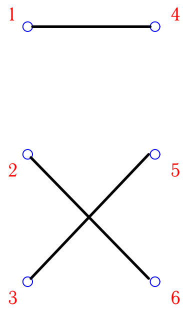

Рис. 4.25

Матрица смежности исходного двудольного графа имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Перманент этой матрицы равен 1. Следовательно, нами найдено единственное совершенное покрытие.

Maple-процедура, реализующая другой алгоритм нахождения наибольшего паросочетания двудольного графа, приведена на с. 131. Пример использования этой процедуры дан на с. 134.

4.5. Задача о назначениях

Известно, что совершенное паросочетание в двудольном графе может быть не единственным. Поэтому, если граф взвешенный, т.е. каждое ребро наделено весом, то естественно поставить задачу о поиске паросочетания с наибольшим или наименьшим весом. Очевидна возможность практического применения решения этой задачи. Рассмотрим, например, задачу о назначении группы n сотрудников по n рабочим местам. Каждый из сотрудников может работать на любом из этих мест, но оплата труда везде разная. Обозначим через a_{ij} оплату труда сотрудника i на рабочем месте j. Матрица коэффициентов a_{ij} в общем случае несимметрична. Оптимальное распределение сотрудников соответствует минимальным расходам на производство. Представляя сотрудников вершинами одной доли графа, а рабочие места — вершинами другой доли, получим полный двудольный взвешенный граф. Совершенное паросочетание наименьшего веса является решением задачи.

З а д а ч а. Оплата труда работника i на рабочем месте j определяется коэффициентом a_{ij} (рис. 4.26). Найти одно из оптимальных назначений и суммарные затраты Σ на производство.

а

$$A = \begin{vmatrix} 17 & 18 & 16 & 18 & 18 & 18 & 18 \\ 18 & 39 & 18 & 47 & 45 & 48 & 55 \\ 26 & 30 & 18 & 58 & 59 & 62 & 66 \\ 25 & 29 & 18 & 50 & 51 & 54 & 61 \\ 30 & 37 & 18 & 33 & 57 & 60 & 64 \\ 30 & 34 & 18 & 33 & 34 & 60 & 64 \\ 39 & 40 & 18 & 39 & 43 & 40 & 74 \end{vmatrix}$$

б

$$A = \begin{vmatrix} 21 & 21 & 37 & 29 & 30 & 33 & 45 \\ 16 & 16 & 48 & 43 & 38 & 44 & 56 \\ 19 & 16 & 42 & 46 & 44 & 50 & 59 \\ 25 & 16 & 29 & 50 & 48 & 54 & 66 \\ 24 & 16 & 34 & 29 & 42 & 48 & 57 \\ 16 & 15 & 16 & 16 & 16 & 15 & 16 \\ 36 & 16 & 46 & 38 & 36 & 36 & 75 \end{vmatrix}$$

в

$$A = \begin{vmatrix} 20 & 19 & 19 & 16 & 19 & 19 & 19 \\ 19 & 39 & 49 & 19 & 49 & 51 & 53 \\ 28 & 34 & 56 & 19 & 56 & 58 & 57 \\ 25 & 31 & 26 & 19 & 47 & 49 & 48 \\ 29 & 38 & 42 & 19 & 63 & 65 & 64 \\ 34 & 37 & 38 & 19 & 38 & 69 & 68 \\ 36 & 36 & 46 & 19 & 40 & 39 & 66 \end{vmatrix}$$

г

$$A = \begin{vmatrix} 36 & 36 & 47 & 37 & 44 & 41 & 58 \\ 28 & 47 & 43 & 42 & 49 & 49 & 60 \\ 23 & 23 & 36 & 35 & 39 & 42 & 56 \\ 17 & 23 & 23 & 11 & 23 & 23 & 23 \\ 23 & 35 & 34 & 27 & 48 & 48 & 62 \\ 23 & 29 & 25 & 24 & 25 & 42 & 56 \\ 23 & 42 & 47 & 37 & 41 & 35 & 80 \end{vmatrix}$$

д

$$A = \begin{vmatrix} 30 & 32 & 31 & 46 & 40 & 30 & 50 \\ 21 & 23 & 28 & 43 & 40 & 21 & 47 \\ 21 & 17 & 33 & 45 & 45 & 17 & 55 \\ 21 & 17 & 17 & 12 & 17 & 11 & 17 \\ 33 & 32 & 37 & 37 & 57 & 17 & 67 \\ 28 & 24 & 26 & 32 & 29 & 17 & 57 \\ 37 & 39 & 35 & 44 & 38 & 17 & 72 \end{vmatrix}$$

е

$$A = \begin{vmatrix} 24 & 36 & 32 & 24 & 30 & 39 & 43 \\ 24 & 53 & 58 & 24 & 47 & 56 & 63 \\ 24 & 33 & 42 & 24 & 40 & 46 & 56 \\ 28 & 40 & 39 & 24 & 52 & 58 & 65 \\ 25 & 34 & 33 & 24 & 39 & 45 & 52 \\ 24 & 24 & 24 & 19 & 24 & 14 & 24 \\ 32 & 44 & 34 & 24 & 29 & 35 & 63 \end{vmatrix}$$

ж

$$A = \begin{vmatrix} 15 & 15 & 23 & 35 & 36 & 39 & 34 \\ 16 & 15 & 41 & 41 & 45 & 48 & 46 \\ 19 & 15 & 44 & 47 & 51 & 51 & 46 \\ 15 & 13 & 15 & 18 & 15 & 15 & 15 \\ 30 & 15 & 38 & 38 & 63 & 63 & 61 \\ 30 & 15 & 32 & 38 & 36 & 63 & 61 \\ 28 & 15 & 30 & 39 & 34 & 37 & 54 \end{vmatrix}$$

з

$$A = \begin{vmatrix} 30 & 36 & 35 & 42 & 37 & 51 & 42 \\ 24 & 29 & 34 & 41 & 39 & 47 & 41 \\ 13 & 23 & 20 & 23 & 23 & 23 & 23 \\ 24 & 30 & 32 & 44 & 42 & 53 & 47 \\ 23 & 23 & 31 & 26 & 42 & 53 & 47 \\ 23 & 34 & 33 & 34 & 32 & 69 & 63 \\ 23 & 34 & 27 & 31 & 26 & 37 & 48 \end{vmatrix}$$

и

$$A = \begin{vmatrix} 12 & 26 & 26 & 26 & 19 & 23 & 23 \\ 28 & 56 & 49 & 48 & 28 & 54 & 57 \\ 27 & 38 & 59 & 52 & 27 & 52 & 58 \\ 26 & 31 & 30 & 44 & 26 & 50 & 56 \\ 26 & 34 & 36 & 26 & 26 & 43 & 49 \\ 27 & 32 & 31 & 27 & 23 & 45 & 51 \\ 33 & 35 & 43 & 30 & 23 & 27 & 57 \end{vmatrix}$$

к

$$A = \begin{vmatrix} 15 & 18 & 14 & 18 & 18 & 18 & 18 \\ 19 & 30 & 18 & 40 & 44 & 42 & 47 \\ 28 & 33 & 18 & 53 & 54 & 55 & 60 \\ 25 & 30 & 18 & 41 & 45 & 46 & 51 \\ 27 & 29 & 18 & 30 & 57 & 58 & 63 \\ 28 & 30 & 18 & 28 & 32 & 54 & 59 \\ 33 & 41 & 18 & 36 & 37 & 38 & 66 \end{vmatrix}$$

Рис. 4.26

Ответы

№	Σ	Веса назначения	№	Σ	Веса назначения
а	190	18, 18, 18, 29, 33, 34, 40	е	200	43, 24, 33, 24, 33, 14, 29
б	172	30, 16, 16, 29, 29, 16, 36	ж	180	23, 16, 15, 15, 38, 36, 37
в	194	19, 19, 34, 26, 19, 38, 39	з	201	42, 29, 23, 32, 26, 23, 26
г	205	41, 43, 23, 23, 27, 25, 23	и	193	23, 28, 27, 31, 26, 31, 27
д	169	31, 21, 17, 17, 37, 29, 17	к	185	18, 19, 18, 30, 30, 32, 38

Пример. Оплата труда работника i на рабочем месте j определяется коэффициентом a_{ij}:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 4 & 6 \\ 17 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 10 & 4 \end{vmatrix}.$$

Найти одно из оптимальных назначений и суммарные затраты на производство.

Решение. Применим для решения венгерский алгоритм [2]. Алгоритм основан на теории чередующихся цепей Дж. Петерсена. Преобразуем матрицу A. Вычтем из каждой строки минимальный элемент. Получим

$$A' = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 5 \\ 16 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 3 \end{vmatrix}.$$

Изобразим двудольный граф, в котором ребра соответствуют нулевым элементам матрицы A' (рис. 4.27).

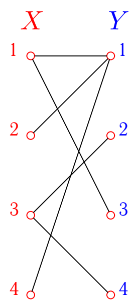

Рис. 4.27

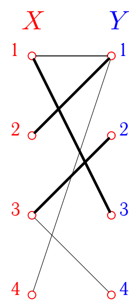

Рис. 4.28

Рассмотрим в этом графе какое-либо максимальное паросочетание. Выделим соответствующие ребра (рис. 4.28).

Чередующейся [1] цепи из X в Y нет. Следовательно, это паросочетание является наибольшим. Выделим множества вершин, не входящие в паросочетание. Это $X_m = \{x_4\}$, $Y_m = \{y_4\}$. Составим множества вершин, которые входят в цепи [2], соединяющие X_m и X:

$$X' = \{x_2, x_4\},\ Y' = \{y_1\}.$$

Преобразуем матрицу A'. Найдем минимальный элемент в строках с номерами элементов множества X' и столбцах с номерами элементов множества $Y \backslash Y'$, т.е в матрице

$$\begin{vmatrix} . & . & . & . \\ . & 5 & 3 & 5 \\ . & . & . & . \\ . & 5 & 9 & 3 \end{vmatrix}.$$

Минимальный элемент равен 3. Вычтем 3 из строк 2 и 4 и добавим 3 к столбцу 1. Получим

$$A'' = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 19 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{vmatrix}.$$

Соответствующий граф (см. рис. 4.28) изменился. Исчезло ребро (1, 1), и добавились ребра (2, 3) и (4, 4) (рис. 4.29). В этом графе есть ребро (4, 4), не входящее в выделенное паросочетание и не инцидентное его вершинам, но соединяющее X и Y. Паросочетание стало совершенным (рис. 4.30), множества X_m и Y_m пусты, следовательно, задача решена. Таким образом, выбирая элементы исходной матрицы A с номерами ребер полученного паросочетания, найдем наименьшие затраты: $\Sigma = a_{13} + a_{21} + a_{32} + a_{44} = 1 + 1 + 1 + 4 = 7$.

[1] Чередующаяся цепь состоит из нечетного числа чередующихся тонких (из X в Y) и толстых (в обратном направлении) ребер, начиная и кончая тонким ребром. Если бы такая цепь существовала, то число ребер в паросочетании можно было бы увеличить, поменяв толстые и тонкие ребра в этой цепи.

[2] От X к Y можно двигаться по тонким ребрам, в обратном направлении — по толстым.

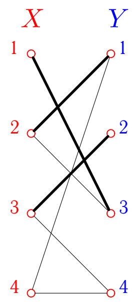

Рис. 4.29

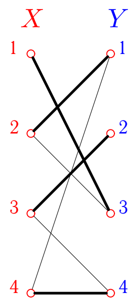

Рис. 4.30

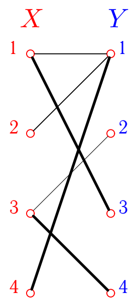

Рис. 4.31

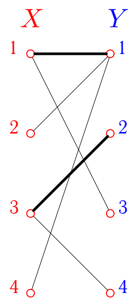

Рис. 4.32

З а м е ч а н и е 1. Паросочетание на рис. 4.28 не единственное. Имеется еще одно наибольшее (3 ребра) паросочетание (рис. 4.31). Множества вершин, не входящие в паросочетание, — это $X_m = \{x_2\}$ и $Y_m = \{y_2\}$. При этом множества X' и Y' не изменятся:

$$X' = \{x_2, x_4\}, \quad Y' = \{y_1\}.$$

З а м е ч а н и е 2. Паросочетание на рис. 4.28 сразу оказалось наибольшим. Однако можно было бы выбрать и не наибольшее, но максимальное паросочетание (рис. 4.32). В этом случае, обратив чередующуюся цепь x_4, y_1, x_1, y_3 (толстые ребра меняются на тонкие, и наоборот), получим наибольшее покрытие (рис. 4.31).

4.6. Остов наименьшего веса

Остовом графа G называют граф, не содержащий циклов и состоящий из ребер графа G и всех его вершин. Таким образом, остов графа является деревом. Число ребер остова равно рангу графа ($\nu^* = n - k$). Число остовов графа можно вычислить по матрице Кирхгофа (см. с. 76).

З а д а ч а. Дан взвешенный граф (рис. 4.33). Найти число остовов графа и остов графа минимального веса.

В таблице ответов на с. 76 даны веса ребер минимального остова, суммарный вес остова Σ и число остовов графа n_0.