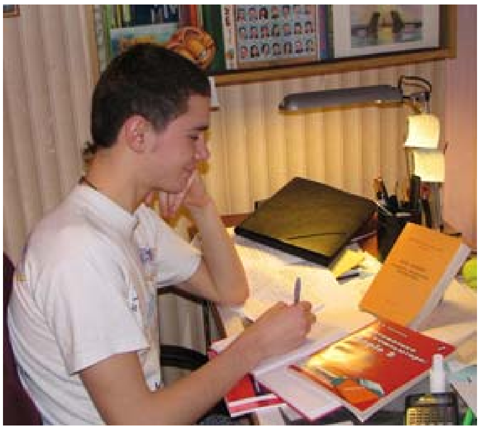
Московский энергетический институт

(технический университет)

Задача № 20.12



Группа: С-11-04

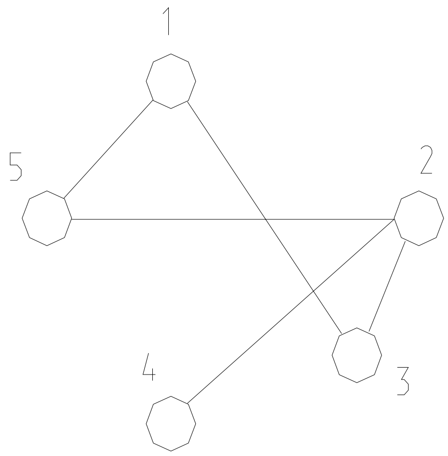
Студент: Михайлов Д. В.

Преподаватель: Кирсанов М. Н.

Москва 2006

Задача № 20.12.

Найти хроматический полином исходного графа и вычислить число способов раскраски графа в $x_o=3$ цветов.



Теория:

Для определения числа способов раскраски графа в x цветов нужно составить хроматический полином ***P(G,x).*** Значение полинома при конкретном $x = x_o$ равно числу правильных раскрасок графа в x_o цветов.

Имеется лемма, утверждающая, что хроматический полином графа имеет вид:

$$P(G\,,x) = P(G_1\,,x) + P(G_2\,,x), \qquad (1)$$

где G_1 – граф, полученный из G добавлением нового ребра (uv), аграф G_2 получается из G отождествлением вершин u и v. *(* Граф G называется стягиваемым к графу H, если H получается из G последовательным стягиванием его ребер.*)*

Другой вариант леммы:

$$P(G\,,x) = P(G_1\,,x) - P(G_2\,,x), \qquad (2)$$

где G_1 — граф, полученный из G удалением ребра (uv), а граф G_2 получается из G отождествлением вершин u и v.

Оба варианта леммы составляет основу для хроматической редукции графа. Хроматическая редукция графа — представление графа в виде нескольких пустых или полных графов, сумма хроматических полиномов которых равна хроматическому полиному графа. Очевидно, что хроматический полином пустого графа O_1, равен x^n (каждая вершина может быть раскрашена независимо от других), а для полного графа $P(K_n,x) = x(x - 1)(x — 2)...(x - n + 1)$. Последнее выражение называют факториальной степенью переменной x: $P(K_n,x) = x^{(n)}$.

Разложения по пустым и полным графам связаны. Факториальную степень можно представить в виде полинома:

$$x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} s_1(n,k)x^k,$$

где $s_1(n,k)$ — числа Стирлинга первого рода и, наоборот, степень x^n можно выразить через факториальные степени:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} s_2(n,k)x^{(k)},$$

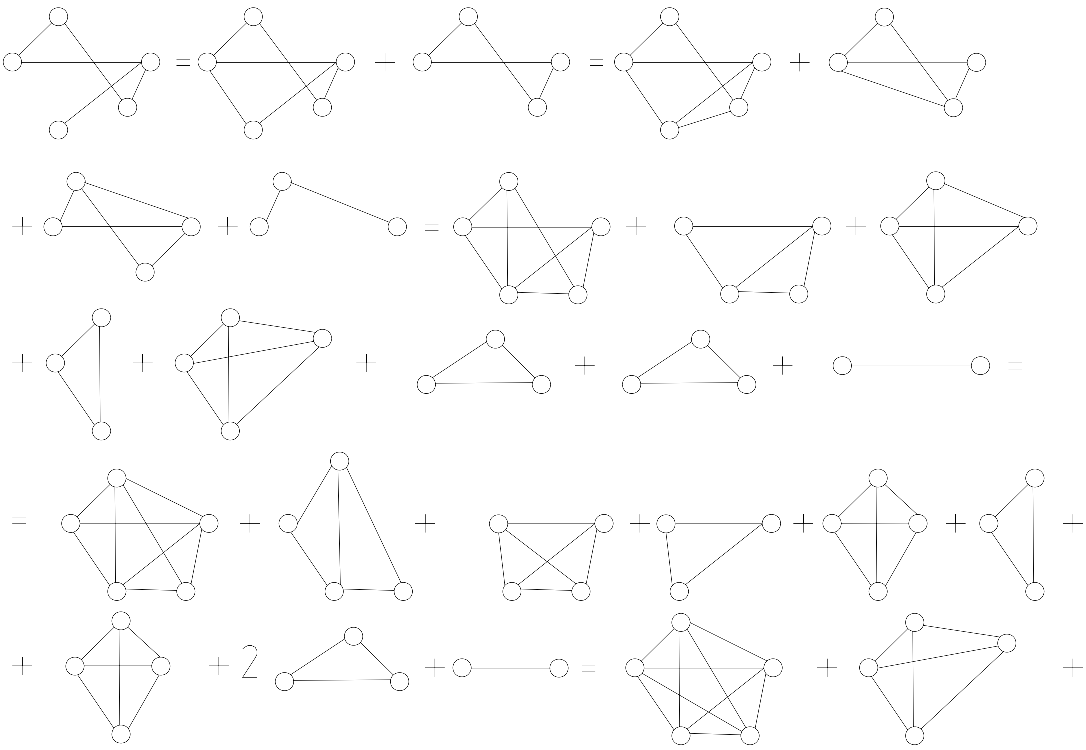
где $s_2(n, k)$ — числа Стирлинга второго рода, обладающие следующими свойствами

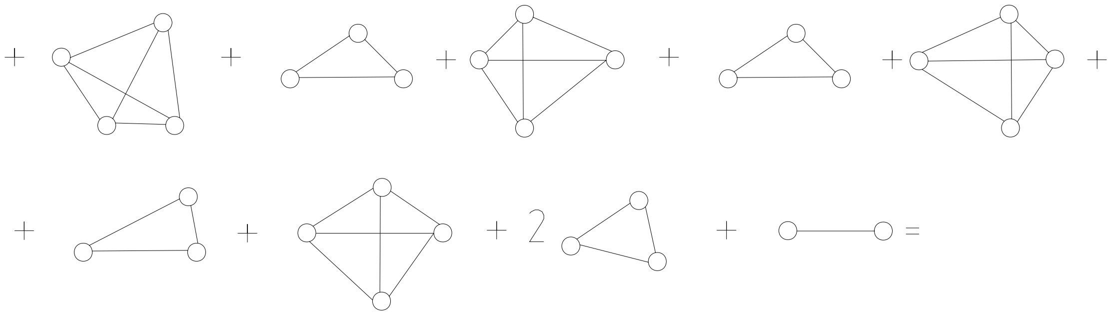
$$s_2(n,k) = s_2(n-1,k-1) + ks_2(n-1,k),\ 0 < k < n,$$
$$s_2(n,n) = 1,\quad (n \geqslant 0),\quad s_2(n,0) = 0,\quad (n > 0).$$

В зависимости от числа ребер графа можно использовать разложение (1) или (2). Если граф почти полный, то добавив несколько ребер по разложению (1), получим хроматический полином в виде суммы факториальных степеней. Если же ребер мало, и для получения пустого графа требуется удалить только несколько ребер, то следует использовать разложение (2) с удалением ребер.

Решение:

Воспользуемся леммой (2). Добавляя ребра и отожествляя соответствующие вершины (стягивая ребра), сведем исходный граф к полным графам. Отожествление вершин всегда приводит к уменьшению порядка и (иногда) размера графа.





Приведя подобные члены, получим:

$=K_5+5K_4+5K_3+K_2$

Это разложение называется хроматической редукцией графа по полным графам.

$P(G, x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+5x(x-1)(x-2)(x-3)+5x(x-1)(x-2)+x(x-1)=x^5-5x^4+10x^3-9x^2+3x=3^5-5*3^4+10*3^3-9*3^2+3*3=36.$

Видно, что действительно выполняются теоремы, которые могут быть полезны при получении хроматического полинома:

Теорема 1. *Коэффициенты хроматического полинома составляют знакопеременную последовательность.*

Теорема 2. *Абсолютная величина второго коэффициента хроматического полинома равна числу ребер графа.*

Ответ: таким образом, число способов раскраски графа в $x_o=3$ цветов равно 36.

Расчеты по программе **Maple** (raskraska.mws), подтверждают ответ.