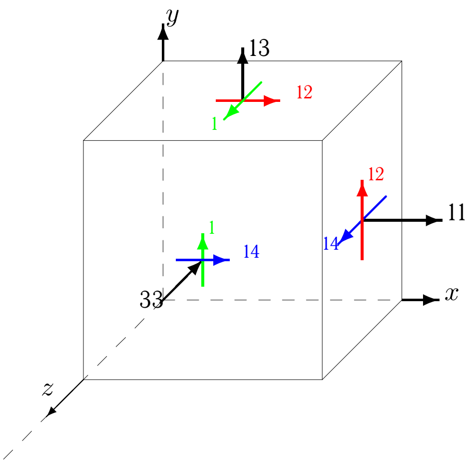
ЗАДАЧА 1

Найти главные нормальные и касательные напряжения, относительные главные деформации, относительное изменение объема, октаэдрическое напряжение.



Дано:
$\sigma_x = 11$МПа, $\sigma_y = 13$МПа, $\sigma_z = -33$МПа,
$\tau_{xy} = 12$МПа, $\tau_{xz} = 14$МПа, $\tau_{yz} = 1$МПа.
Модуль упругости $E = 100 \cdot 10^4$МПа,
коэффициент Пуассона $\nu = 0.5$

Решение

Вычислим инварианты напряжения
$J_1 = -(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = -11 - 13 + 33 = 9$МПа,
$J_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{yz}^2 = -990$МПа^2,
$J_3 = -\sigma_x\sigma_y\sigma_z - 2\tau_{yz}\tau_{yx}\tau_{xz} + \sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_y\tau_{xz}^2 + \sigma_z\tau_{yx}^2 = 2190$МПа^3,
Решим кубическое уравнение $\sigma^3 + J_1\sigma^2 + J_2\sigma + J_3 = 0$.
Используем метод Ньютона: $\sigma_i(k+1) = \sigma_i(k) - \frac{\sigma_i(k)^3 + J_1\sigma_i(k)^2 + J_2\sigma_i(k) + J_3}{3\sigma_i(k)^2 + 2J_1\sigma_i(k) + J_2}$.
Дадим начальное приближение
$\sigma_i(0) = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = -3$МПа.

$$\sigma_i(1) = -3 - \frac{(-3)^3 + 9(-3)^2 + 990 \cdot 3 + 2190}{3(-3)^2 - 18 \cdot 3 - 990} = -3 + 5.1268 = 2.1268\text{МПа}.$$

$$\sigma_i(2) = 2.1268 - \frac{(2.1268)^3 + 9(2.1268)^2 - 990 \cdot 2.1268 + 2190}{3(2.1268)^2 + 18 \cdot 2.1268 - 990} = 2.1268 + 0.1436 = 2.2705\text{МПа}.$$

$$\sigma_i(3) = 2.2705 - \frac{(2.2705)^3 + 9(2.2705)^2 - 990 \cdot 2.2705 + 2190}{3(2.2705)^2 + 18 \cdot 2.2705 - 990} = 2.2705 + 0.3431 \cdot 10^{-3} = 2.2708\text{МПа}.$$

Разделим кубическое уравнение $\sigma^3 + 9\sigma^2 - 990\sigma + 2190 = 0$ на $\sigma - 2.27$

$$\begin{array}{rrrr|l}
\sigma^3 & +9\sigma^2 & -990\sigma & +2190 & \sigma - 2.27 \\ \cline{5-5}
\sigma^3 & -2.27\sigma^2 & & & \sigma^2 + 11.27\sigma - 964.4 \\ \cline{1-2}
& 11.27\sigma^2 & -990\sigma & +2190 & \\
& 11.27\sigma^2 & -25.6\sigma & & \\ \cline{2-3}
& & -964.4\sigma & +2190 & \\
& & -964.4\sigma & +2190 &
\end{array}$$

получим квадратное уравнение

$$\sigma^2 + 11.27\sigma - 964.4 = 0,$$

решим его и найдем еще два значения
$\sigma_1^* = (-11.27 + \sqrt{3984.66})/2 = 25.9266$МПа, $\sigma_2^* = (-11.27 - \sqrt{3984.66})/2 = -37.1975$МПа,
или (в порядке убывания) $\sigma_1 = 25.9266$МПа, $\sigma_2 = 2.2708$МПа, $\sigma_3 = -37.1975$МПа,
Проверка. Инварианты
$J_1 = -(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = -25.93 - 2.2708 + 37.1975 = 9$МПа,
$J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 = +25.93 \cdot 2.27 - 2.27 \cdot 37.2 - 25.93 \cdot 37.2 = -990$МПа,
$J_3 = -\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = -2190$МПа.
Найдем решение системы уравнений

$$(\sigma_y - \sigma_1)\frac{m_1}{l_1} + \tau_{yz}\frac{n_1}{l_1} + \tau_{xy} = 0.$$

$$\tau_{xy}\frac{m_1}{l_1} + \tau_{xz}\frac{n_1}{l_1} + (\sigma_x - \sigma_1) = 0,$$

обозначим $x_1 = m_1/l_1,\ x_2 = n_1/l_1$.

$$-12.9266x_1 + 1x_2 + 12 = 0.$$

$$12x_1 + 14x_2 - 14.9266 = 0,$$

$x_1 = 0.9479, \quad x_2 = 0.2537.$

$$l_1 = \sqrt{\frac{1}{1 + x_1^2 + x_2^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 + (0.9479)^2 + (0.2537)^2}} = \sqrt{\frac{1}{1.9629}} = \sqrt{0.5094} = 0.7138$$

<u>Направляющие косинусы</u>
$m_1 = x_1 l_1 = +0.95 \cdot 0.71 = 0.6766$, $n_1 = x_2 l_1 = +0.25 \cdot 0.71 = 0.1811$.
Проверка: $m_1^2 + n_1^2 + l_1^2 = (0.6766)^2 + (0.1811)^2 + (0.7138)^2 = 0.4578 + 0.0328 + 0.5094 = 1$
<u>Относительные главные деформации</u>

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)) = \frac{25.93 + 0.5 \cdot 34.93}{100} \cdot 10^{-4} = \frac{43.39}{100} \cdot 10^{-4} = 4.34 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)) = \frac{2.27 + 0.5 \cdot 11.27}{100} \cdot 10^{-4} = \frac{7.9}{100} \cdot 10^{-4} = 0.8 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}(\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)) = \frac{-37.2 - 0.5 \cdot 28.2}{100} \cdot 10^{-4} = \frac{-51.3}{100} \cdot 10^{-4} = -5.13 \cdot 10^{-5}$$

<u>Относительное изменение объема</u>

$$(V_1 - V_0)/V_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (4.34 + 0.8 - 5.13) \cdot 10^{-5} = 0.1 \cdot 10^{-6}.$$

<u>Главные касательные напряжения</u>

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \frac{2.2708 + 37.1975}{2} = 19.7342\text{МПа}.$$

$$\tau_2 = -\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = -\frac{-37.1975 - 25.9266}{2} = 31.5621\text{МПа}.$$

$$\tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{25.9266 - 2.2708}{2} = 11.8279\text{МПа}.$$

Октаэдрическое напряжение [1]

$$\tau = \frac{2}{3}\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2} = \frac{2}{3}\sqrt{19.73^2 + 31.56^2 + 11.83^2} = \frac{2}{3}\sqrt{1525.5} = 26.04\text{МПа}.$$

[1] Надаи А.*Пластичность и разрушение твердых тел. Т.2* М.:1969, с.687