

## Глава 1

# ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

При изучении темы ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ вы научитесь составлять уравнения проекций и решать задачи равновесия плоских стержневых систем методом вырезания узлов. Этот метод лежит в основе компьютерной программы расчета ферм (§15.1.).

### 1.1. Простая стержневая система

**Постановка задачи.** *Плоская шарнирно-стержневая конструкция закреплена на неподвижном основании и нагружена в шарнирах силами. Найти усилия в стержнях.*

#### План решения

Рассматриваем равновесие внутренних шарниров системы, не соединенных с неподвижным основанием. Такие шарниры будем называть узлами. Действие каждого стержня заменяем его реакцией — силой, направленной из узла к стержню. Усилие — это проекция реакции стержня на внешнюю нормаль к сечению. Если в результате решения задачи реакция стержня, приложенная таким образом к узлу, оказывается отрицательной, то стержень сжат, в противном случае стержень растянут.

1. Вырезаем узел, соединенный только с двумя стержнями. Действие стержней заменяем их реакциями.
2. Для полученной системы сходящихся сил составляем уравнения равновесия в проекциях на выбранные для этого узла оси.
3. Решаем систему двух линейных уравнений и находим искомые усилия.
4. Вырезаем очередной узел системы, тот, к которому подходят не более двух стержней с неизвестными усилиями. Составляем и решаем уравнения равновесия в проекциях на оси, выбранные для этого узла. Этот пункт плана выполняем несколько раз для всех узлов до нахождения всех усилий.
5. Для проверки решения мысленно отделяем конструкцию от основания, заменяя действие рассеченных стержней найденными реакциями. Проверяем выполнение условий равновесия полученной системы сил.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Существуют фермы<sup>1</sup>, у которых к каждому узлу присоединены более двух стержней. Например, на рис. 4 изображена конструкция (сетчатая ферма В.Г.Шухова), к каждому узлу которой подходит по три стержня. Диагональные стержни расположены в разных плоскостях и не пересекаются.

Здесь нельзя определять усилия по предложенной схеме, переходя от одного узла к другому, так как нет узла, с которого можно начать расчет. В этом случае сначала составляются уравнения равновесия отдельных узлов, а потом совместно решается система полученных уравнений. Систему можно решать любым известным способом (*Решebник ВМ*, §2.1).

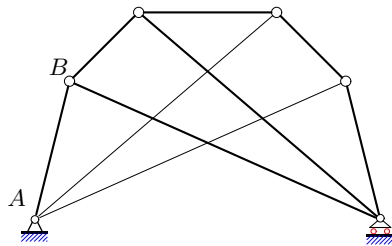


Рис. 4

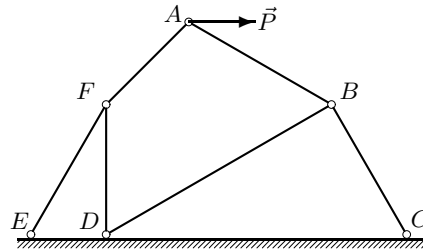


Рис. 5

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Для упрощения уравнений равновесия одну из осей координат можно направить вдоль стержня с неизвестным усилием. Для каждого узла можно выбрать свою систему координат.

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.** Углы между осями и векторами усилий легче определять, если проводить через узлы вспомогательные вертикальные или горизонтальные прямые.

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.** Усилия в стержнях можно найти с помощью системы Maple V (Программа 1, с. 345).

**ПРИМЕР.** Плоская шарнирно-стержневая конструкция закреплена на неподвижном основании шарнирами  $E$ ,  $D$ ,  $C$  и нагружена в шарнире  $A$  горизонтальной силой  $P = 100$  кН (рис. 5). Даны углы:  $\angle DFA = 135^\circ$ ,  $\angle ABD = 60^\circ$ ,  $\angle DCB = 60^\circ$ ,  $\angle BDC = 30^\circ$ ,  $\angle DFE = 30^\circ$ . Найти усилия в стержнях.

#### РЕШЕНИЕ

Конструкция состоит из шести стержней, соединенных тремя шарнирами (узлами). Узлы фермы находятся в равновесии. Для каждого узла  $A$ ,  $B$ ,  $F$  составляем по два уравнения равновесия в проекциях на выбранные оси. Из шести уравнений находим шесть искомых усилий.

<sup>1</sup> Шарнирно-стержневая конструкция, нагруженная в шарнирах силами, называется фермой. Весом стержней фермы и трением в шарнирах пренебрегают.

1. Решение задачи начинаем с рассмотрения узла  $A$ , так как этот узел соединен только с двумя стержнями  $AB$  и  $AF$ . При вырезании узла действие каждого стержня заменяем силой, направленной из шарнира к стержню (рис. 6).

2. Составляем уравнения равновесия. Для упрощения уравнений ось  $y$  направляем по стержню  $AB$ . Получаем

$$\begin{aligned}\sum X_i &= S_{AF} \cos 15^\circ - P \sin 30^\circ = 0, \\ \sum Y_i &= -S_{AF} \sin 15^\circ + S_{AB} + P \cos 30^\circ = 0,\end{aligned}$$

где  $X_i$  — проекции силы  $i$  на ось  $x$ , а  $Y_i$  — проекции силы  $i$  на ось  $y$ .

3. Решаем уравнения. Из первого уравнения системы находим усилие  $S_{AF} = 51.76$  кН, из второго — усилие  $S_{AB} = -73.21$  кН.

4. Рассматриваем узел  $F$ . К нему подходят три стержня (рис. 7).

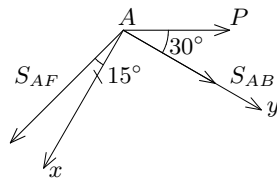


Рис. 6

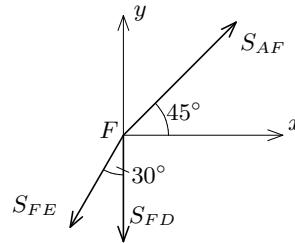


Рис. 7

Усилие в одном из них уже известно  $S_{AF} = 51.76$  кН. Усилия в двух других находим из уравнений для проекций:

$$\begin{aligned}\sum X_i &= -S_{FE} \sin 30^\circ + S_{AF} \cos 45^\circ = 0, \\ \sum Y_i &= -S_{FE} \cos 30^\circ - S_{FD} + S_{AF} \sin 45^\circ = 0.\end{aligned}$$

Находим  $S_{FE} = 73.21$  кН,  $S_{FD} = -26.79$  кН.

Составляем уравнения равновесия узла  $B$  в проекциях на оси, направленные по стержням  $BC$  и  $BD$  (рис. 8):

$$\begin{aligned}\sum X_i &= S_{DB} + S_{AB} \sin 30^\circ = 0, \\ \sum Y_i &= S_{BC} - S_{AB} \cos 30^\circ = 0.\end{aligned}$$

Решая уравнения, получаем:  $S_{DB} = -S_{AB} \sin 30^\circ = 73.21 \cdot 0.5 = 36.6$  кН,  $S_{BC} = S_{AB} \cos 30^\circ = -73.21 \cdot 0.866 = -63.4$  кН.

5. Проверка. Рассматриваем равновесие конструкции в целом.

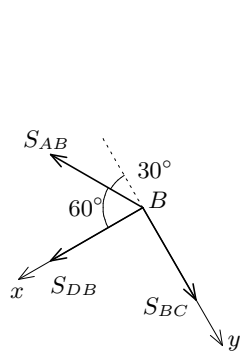


Рис. 8

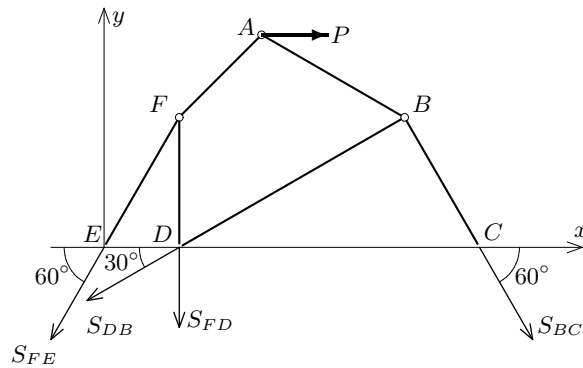


Рис. 9

Горизонтальным сечением отсекаем ферму от основания. Действия стержней заменяем силами, которые направляем, как и раньше, по внешним нормальям к сечениям стержней, т.е. вниз (рис. 9).

Система сил, действующих на ферму, не является сходящейся. Для такой системы справедливы три уравнения равновесия, одно из которых — уравнение моментов. Составление уравнения моментов — тема задач статики произвольной плоской или пространственной системы сил (§2.1 – 3.2). Для того, чтобы не выходить за пределы темы поставленной задачи, в решении которой используются только уравнения проекций, составим два уравнения проекций на оси  $x$  и  $y$  всех сил, действующих на ферму целиком:

$$\begin{aligned}\sum X_i &= -S_{FE} \cos 60^\circ - S_{DB} \cos 30^\circ + S_{BC} \cos 60^\circ + P = 0, \\ \sum Y_i &= -S_{FE} \sin 60^\circ - S_{FD} - S_{DB} \sin 30^\circ - S_{BC} \sin 60^\circ = 0.\end{aligned}$$

Суммы равны нулю. Это подтверждает правильность решения.

Результаты расчетов заносим в таблицу:

$S_{AF}$	$S_{AB}$	$S_{FE}$	$S_{FD}$	$S_{DB}$	$S_{BC}$
кН					
51.76	-73.21	73.21	-26.79	36.60	-63.40

**Условия задач.** Плоская шарнирно-стержневая конструкция закреплена на неподвижном основании и нагружена в одном шарнире вертикальной или горизонтальной силой  $P$ . Найти усилия в стержнях (в кН).