

Глава 1

СТАТИКА

Статика — один из трех основных разделов теоретической механики. В статике изучается равновесие тел под действием сил и свойства систем сил, необязательно находящихся в равновесии. В сборнике приведены четыре типа задач статики — задачи на плоские составные конструкции С1, С2, С3, трение качения С4, ферма С5 и задачи пространственной статики С6 и С7. Как и во всех задачах сборника, эти задачи имеют целые ответы, однако промежуточные ответы могут быть и не целые. Так, в задаче о ферме усилия в некоторых стержнях выражаются вещественными числами.

Для решения задач статики потребуются понятия проекции силы на ось и момента силы относительно точки и оси. Напомним, что проекция вектора силы \vec{F} на ось x определяется по формуле $F_x = F \cos \alpha$, где α — угол между положительным направлением оси и вектором силы, отсчитываемый против часовой стрелки. Если угол острый, то проекция положительная, если тупой — отрицательная. Если сила перпендикулярна оси, то ее проекция на эту ось равна нулю. Проекция силы, параллельной оси, равна F , если сила и ось направлены в одну сторону ($\alpha = 0$), и $-F$, если — в разные стороны ($\alpha = 180^\circ$).

Общее определение момента \vec{M}_O силы \vec{F} относительно точки O дается векторным произведением¹

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r}_0 \times \vec{F}, \quad (1)$$

где \vec{r}_0 — радиус-вектор точки приложения вектора силы относительно точки O . Модуль момента вычисляем по формуле $M_O(\vec{F}) = r_0 F \sin \gamma$, где γ — угол между векторами \vec{r}_0 и \vec{F} . Направление вектора момента вычисляется по правилу векторного произведения. Плечо h силы относительно точки O — это кратчайшее расстояние от точки до линии действия силы; $h = r_0 \sin \gamma$.

Вектор момента перпендикулярен плоскости, в которой располагаются силы. Поэтому в задачах статики плоской системы сил момент можно рассматривать как скалярную величину — величину проекции вектора момента на нормаль к плоскости (ось z). Индекс z для сокращения записи часто опускают и отождествляют момент силы

¹Векторное произведение иногда обозначается скобками $[\vec{r}_0, \vec{F}]$.

M_O относительно точки на плоскости со скалярной величиной — M_{Oz} . Отсюда вытекает практическое правило определения момента силы относительно точки в плоских задачах статики. Для вычисления момента силы относительно точки O (рис. 1) сначала находим проекции силы на оси, а затем момент вычисляем по формуле $M_{Oz}(F) = -F_x \cdot y_0 + F_y \cdot x_0$. Другой способ вычисления момента: $M_{Oz}(F) = \pm Fh$, где h — плечо силы относительно точки O .

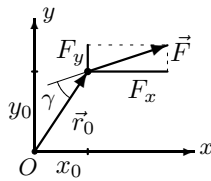


Рис. 1

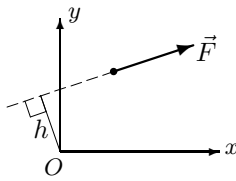


Рис. 2

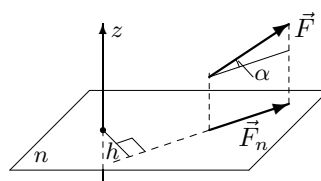


Рис. 3

Знак определяется по правилу векторного произведения. Если сила поворачивает тело относительно центра по часовой стрелке — момент отрицательный, против часовой стрелки — положительный. На рис. 2 момент силы \vec{F} относительно точки O отрицательный. Если сила или линия ее действия пересекает точку, то момент силы относительно этой точки равен нулю.

При решении задач пространственной статики С6, с. 58, — требуется вычислять момент силы относительно оси, или, что то же, проекцию момента силы относительно точки (1) на ось, проходящую через нее. Иногда эту величину удобнее искать как момент проекции \vec{F}_n силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью (рис. 3). Знак определяем по направлению вращения вокруг оси с точки зрения наблюдателя, находящегося на конце оси. Если вращение происходит по часовой стрелке, то момент отрицательный, против часовой стрелки — положительный. Момент силы относительно оси равен нулю, если сила параллельна оси или пересекает ее, т.е., если сила и ось лежат в одной плоскости.

Кроме сил в статике рассматриваются и пары сил. Пара — это совокупность двух равных параллельных противоположно направленных сил. Пара характеризуется моментом — суммой моментов ее сил относительно некоторой точки. Легко показать, что положение точки не существенно и на момент не влияет, поэтому момент пары является свободным вектором. Напомним, что вектор силы является вектором скользящим¹. В зависимости от знака момента пары на плоскости изображать пару будем изогнутой стрелкой \curvearrowright или \curvearrowleft . Вектор па-

¹Изложение основных теорем статики в терминах скользящих векторов дано в учебнике Ю.Ф.Голубева [7].

ры перпендикулярен ее плоскости. Для решения задач о равновесии тел или системы тел необходимо выделить тело, равновесие которого изучается. Связи заменяем их реакциями. Основные виды связей в плоских задачах и их реакции даны в таблице 1.

Подвижная опора имеет одну реакцию, перпендикулярную плоскости опоры (первые две строки таблицы — опора A). В условиях задач предполагается, что все связи двусторонние, т.е. предусмотрено некоторое ограничение (на рисунке не показано), не позволяющее подвижным опорам отрываться от поверхности. Неподвижный шарнир B имеет две реакции, заделка C — три, включая реактивный момент. Направлять неизвестные реакции лучше в положительном направлении соответствующей оси. Момент направляем против часовой стрелки.

При разбиении составной конструкции по внутренней связи (скользящей заделке D) к каждой из частей прикладываем реакции — взаимно противоположные силы, перпендикулярные оси скольжения, и моменты. Заделка с двойным скольжением E имеет только одну реакцию — момент. В скользящей заделке G возникает реактивный момент и сила, перпендикулярная направлению скольжения.

Программы решения трех задач статики в системе Maple ¹ приведены в конце книги (с. 221, 225).

Большинство задач статики сводится к решению систем линейных уравнений. Рутинную часть работы по составлению и решению уравнений можно поручить Maple. Простейшая программа может выглядеть, например, так:

```
eq1 := Xa*2.5 + Ya*3.1 = 20 :
eq2 := -Xa*1.5 + Ya*10 = -12.5 :
solve (eq1, eq2, Xa, Ya) ;
```

¹ Демонстрационную бесплатную версию Maple VR4 можно взять по адресу <http://vuz.exponenta.ru/PDF/DNLD/MVR4DEMO.rar>

Таблица 1

