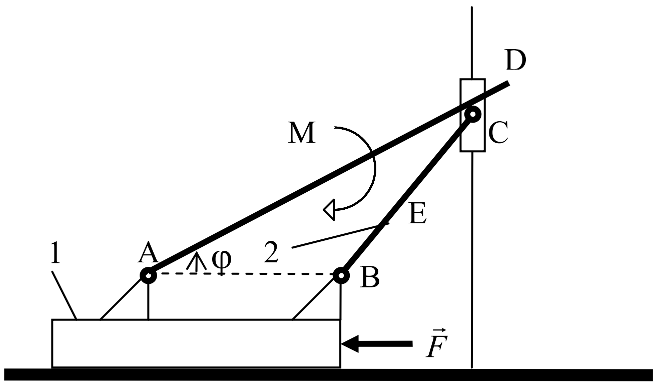
Задача на составление уравнения Лагранжа второго рода (одна степень свободы).

Условие:

Стержень ВС длинны a шарнирно соединяет горизонтальную скользящую платформу и вертикальный ползун С. Стержень AD = $2a$, шарнирно закреплённый на платформе, опирается на ось С ползуна и скользит по ней, АВ $= a$. Масса платформы равна m_1, стержня ВС - m_2. К стержню AD приложен момент М, к платформе – горизонтальная сила F. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня AD - φ.



Решение:

По условию стержень АВ = а и стержень ВС = а, значит АВ = ВС. Из этого следует, что треугольник АСВ – равнобедренный, значит угол СВА = 2 φ и $\omega_2 = 2\dot{\varphi}$

Выражаем скорости данных тел через обобщенную координату.
Составляем граф:

$$B \xrightarrow[a]{2\varphi} C$$

$$x : V_{Cx} = 0 = V_{Bx} - \omega_2 a \sin(2\varphi)$$

$V_{Ax} = V_{Bx}$ так эти точки расположены на твёрдом теле, которое совершает поступательное движение.

Составляем граф:

$B \xrightarrow[a/2]{2\varphi} E$, где Е является серединой стержня ВС.

$$x : V_{Ex} = V_{Bx} - 2\dot{\varphi}\left(\frac{a}{2}\right)\sin(2\varphi)$$

$$y: V_{Ey} = 2\dot{\varphi}\left(\frac{a}{2}\right)\cos(2\varphi)$$

$$V_E = \sqrt{V_{Ex}{}^2 + V_{Ey}{}^2} = \sqrt{\dot{\varphi}^2 a^2}$$

Находим кинетическую энергию:

$$T = \frac{m_1 V_{Ax}^2}{2} + \frac{J_2 \omega_2^2}{2} + \frac{m_2 V_E^2}{2}$$

$J_2 = \dfrac{m_2 a^2}{12}$, так как E это середина однородного стержня длиной a

$$T = \frac{m_1 (2\dot{\varphi} a \sin(2\varphi))^2}{2} + \frac{4 m_2 a^2 \dot{\varphi}^2}{24} + \frac{m_2 \dot{\varphi}^2 a^2}{2} = 2a^2 (m_1 \sin^2(2\varphi) + \frac{m_2}{3})\dot{\varphi}^2$$

Обобщенная сила:

$$Q = \frac{F V_{Bx} - M\dot{\varphi} - m_2 g V_{Ey}}{\dot{\varphi}}$$

$$Q = 2aF\sin(2\varphi) - M - m_2 g a \cos(2\varphi)$$

Записываем уравнение Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q$$

$$4a^2 (m_1 \sin^2(2\varphi) + \frac{m_2}{3})\ddot{\varphi} - 4a^2 (m_1 \sin 4\varphi)\dot{\varphi}^2 = 2aF\sin(2\varphi) - M - m_2 g a \cos(2\varphi)$$