Нелинейное уравнение изгиба стержня

Дифференциальное уравнение изгиба консольного стержня длиной l с поперечной нагрузкой P и моментом M на свободном конце

$$EIw'' = (Px + M - Pl)(1 + w'^2)^{3/2}, \tag{1}$$

где x — продольная координата, $w(x)$ — прогиб, $w'(x) = dw/dx$, EI — жесткость стержня. Обозначим $v = w'(x)$, $k = P/(EI)$, $m = (Pl - M)/(EI)$. Получим

$$v' = (kx - m)(1 + v^2)^{3/2}. \tag{2}$$

Для приращений Δv имеем уравнение

$$\Delta v' - 3(kx - m)(1 + v^2)v\Delta v = 0. \tag{3}$$

Дифференцируем (1) по x

$$\Delta v'' - 3(kx - m)(1 + v^2)v\Delta v' - \frac{3\left(kv(1 + v^2) + (kx - m)v'(1 + 2v^2)\right)}{\sqrt{1 + v^2}}\Delta v = 0 \tag{4}$$

Систему уравнений (1-2) перепишем в матричном виде, выделив в правую часть члены, содержащие $\Delta v''$

$$A\bar{Z} = \bar{B}, \tag{5}$$

где $\bar{Z} = \{\Delta v, \Delta v'\}$, $\bar{B} = \{0, \Delta v''\}$.

Запишем определитель матрицы A, пренебрегая v^2 по сравнению с 1

$$\det(A) = 3kv + 3v'(kx - m). \tag{6}$$

Примем приближенное выражение для решения уравнения (2)

$$v = kx^2/2 - mx. \tag{7}$$

Найдем значения x, при которых определитель (6) обращается в ноль. Подставляя (7) в (6), получим квадратное уравнение. Два решения этого уравнения имеют вид

$$x = (1 \pm \sqrt{3}/3)(m/k) \tag{8}$$

$x_1 = 0.4226(m/k)$, $x_2 = 1.577(m/k)$. Для сравнения заметим, что численное решение уравнения $\det(A) = 0$ при $m = 1$, $k = 1$ дает $x_1 = 0.511$, $x_2 = 1.488$.

Пусть $m = \beta$, $k = \beta$. Приближенное решение (8) не зависит от β (рис. 1, кривые синего цвета). Решение, полученное численно (красные кривые на рис. 1), зависят от β. Кривые прогиба стержня изображены для $\beta = 0.5$ и $\beta = 1$ на рис. 2. Для малых значений нагрузок приближенный и точный расчет дают практически совпадающие кривые прогиба.

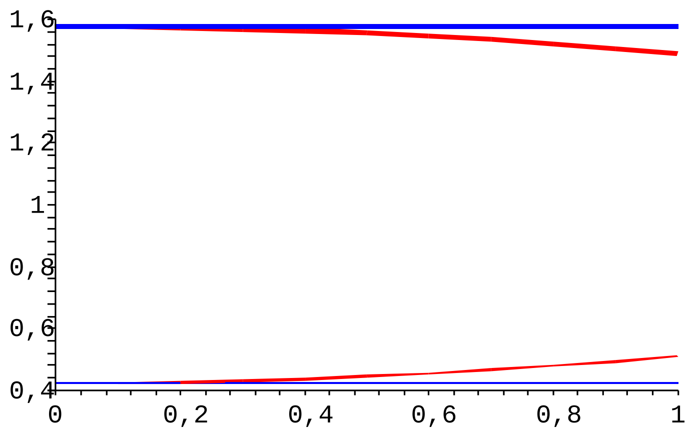

Рис. 1   Зависимость x_1 и x_2 от β

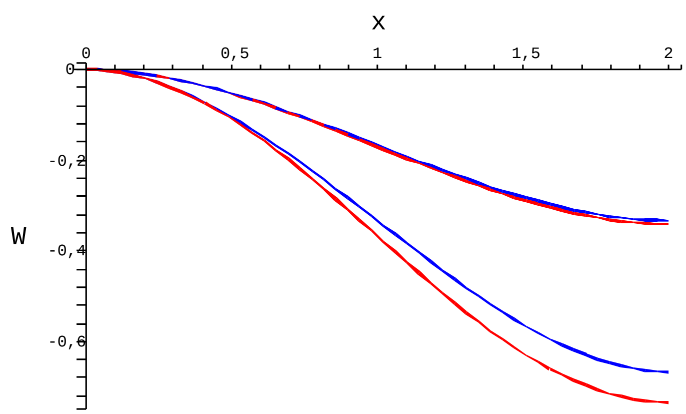

Рис. 2   Линия прогиба стержня