I
КОЛЕБАНИЕ УЗЛА ФЕРМЫ

Пример решения

Задача. *В шарнире C плоской фермы находится точка с массой $m = 9$ кг (рис. 1). Материал стержней имеет модуль упругости E, площадь сечения стержней F, жесткость всех стержней фермы одинакова $EF = 0.1$ кН, $l = 1$ м. Ферма расположена в горизонтальной плоскости. Пренебрегая массой стержней, шарниров и подвижной опоры, определить частоты собственных малых колебаний шарнира C.*

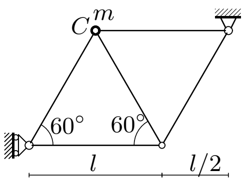

Рис. 1

С учетом упругости стержней система имеет две степени свободы. Основные уравнения задачи следуют из уравнения Лагранжа 2-го рода. В качестве обобщенных координат принимаем горизонтальные и вертикальные перемещения узла x_1 и x_2. Предполагая, что упругие силы линейно зависят от перемещений, записываем уравнение Лагранжа 2-го рода в матричном виде:

$$A\ddot{\vec{x}} + C\vec{x} = 0, \tag{1}$$

где A — матрица инерции, C — матрица жесткости. Матрица обратная C — матрица податливости $B = C^{-1}$, коэффициенты которой (перемещения от единичных сил) вычисляем по формуле Максвелла–Мора [11]:

$$b_{i,j} = b_{j,i} = \sum_{\mu=1}^{n} S_{i,\mu} S_{j,\mu} \frac{l_\mu}{EF}, \qquad i, j = 1, 2, \tag{2}$$

где l_μ — длины стержней, E и F — модуль упругости и площадь поперечного сечения стержней, $S_{i,\mu}$ — безразмерное усилие в стержне с номером μ от действия единичной горизонтальной ($i = 1$) или вертикальной ($i = 2$) нагрузки на шарнир с массой. Произведение EF

называют жесткостью, в данной задаче она считается одинаковой для всех стержней фермы. Коэффициенты $b_{i,j}$ имеют простой физический смысл: $b_{i,j}$ — это перемещение узла в направлении i под действием единичной силы, действующей в направлении j. Измеряются $b_{i,j}$ в м/Н. По теореме взаимности Бетти [1] $b_{i,j} = b_{j,i}$.

Кинетическая энергия точки имеет вид $T = m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)/2$, следовательно, матрица инерции является диагональной:

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}.$$

Умножаем (1) на B и делаем подстановку $\ddot{\vec{x}} = -\omega^2\vec{x}$, что равносильно замене $x_1 = A_1\sin(\omega t + \beta_0)$, $x_2 = A_2\sin(\omega t + \beta_0)$, где A_1, A_2 — амплитуды, ω — частота, β_0 — начальная фаза колебаний. Получаем однородную систему

$$m\omega^2 B\vec{x} - \vec{x} = 0,$$

имеющую ненулевое решение в том случае, если ее определитель равен нулю. Следовательно, задача свелась к поиску собственных значений $\lambda = 1/(m\omega^2)$ матрицы B.

План решения

1. К шарниру, наделенному массой, прикладываем единичную (безразмерную) горизонтальную силу. Определяем усилия в стержнях $S_{1,\mu}, \mu = 1, ..., n$, где n — число стержней фермы.

2. Прикладываем к этому же шарниру единичную вертикальную силу. Определяем усилия в стержнях $S_{2,\mu}$.

3. Используя формулу Максвелла–Мора (2), вычисляем коэффициенты податливости $b_{i,j}$. Записываем их в симметричную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

4. Вычисляем собственные значения (*Решебник ВМ,* §2.10, с. 68) $\lambda_{1,2}$ матрицы B.

5. Находим частоты собственных колебаний $\omega_1 = 1/\sqrt{m\lambda_1}$, $\omega_2 = 1/\sqrt{m\lambda_2}$.

[1] *Энрико Бетти* (1823–1892) — итальянский математик.

Решение

1. К шарниру C, наделенному массой, прикладываем единичную (безразмерную) горизонтальную силу (рис. 2). Находим реакции опор X_A, X_B Y_B от единичной силы. Составляем для этого три уравнения равновесия фермы как жесткого целого

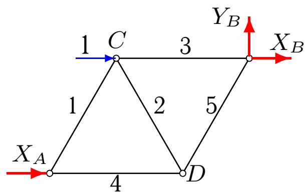

Рис. 2

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_x = X_A + X_B + 1 = 0,\\ &\textstyle\sum_y = Y_B = 0,\\ &\textstyle\sum_{M_B} = X_A l \sin 60^\circ = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Очевидное решение системы: $X_A = 0$, $Y_B = 0$, $X_B = -1$. Методом вырезания узлов [1]) определяем усилия в стержнях (рис. 3, 4,5). Рассматриваем равновесие узла, прикладывая к нему внешние силы (если таковые имеются) и усилия отброшенных стержней, направляя

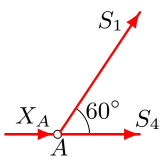

Рис. 3

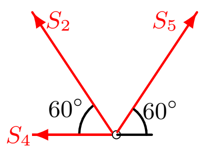

Рис. 4

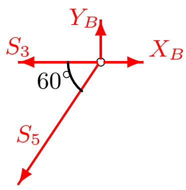

Рис. 5

векторы усилий по стержню из узла к стержню. Номера стержней указаны на рис. 2. Равновесие узла A (рис. 3)

$$\begin{aligned} &X_A + S_1 \cos 60^\circ + S_4 = 0,\\ &S_1 \sin 60^\circ = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Равновесие узла D (рис. 4)

$$\begin{aligned} &-S_2 \cos 60^\circ + S_5 \cos 60^\circ - S_4 = 0,\\ &S_2 \sin 60^\circ + S_5 \sin 60^\circ = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Равновесие узла B (рис. 5)

$$\begin{aligned} &X_B - S_3 - S_5 \cos 60^\circ = 0,\\ &Y_B - S_5 \sin 60^\circ = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

[1]) Не менее эффективно использовать Риттера или метод сечений [5].

Последовательно решаем системы (4), (5), (6). Получаем $S_{1,1} = S_{1,2} = S_{1,4} = S_{1,5} = 0, S_{1,3} = -1$. В обозначении для ответов $S_{1,\mu}$ первый индекс указывает направление приложенной единичной силы. Индекс 1 соответствует горизонтальной единичной силе, 2 — вертикальной силе. Второй индекс — номер стержня.

2. К шарниру C прикладываем единичную вертикальную силу (рис. 6). Находим реакции опор от единичной силы. Составляем для этого уравнения равновесия фермы в целом (проекции на оси и сумма моментов относительно точки B):

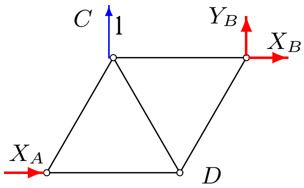

Рис. 6

$$
\begin{aligned}
&\textstyle\sum_x = X_A + X_B = 0,\\
&\textstyle\sum_y = Y_B + 1 = 0,\\
&\textstyle\sum_{M_B} = X_A l \sin 60^\circ - 1 \cdot l = 0
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

Пользуясь теми же уравнениями (4), (5), (6), но с реакциями опор вычисленными из (7), определяем усилия в стержнях: $S_{2,1} = 0$, $S_{2,2} = 1.155$, $S_{2,3} = -0.577$, $S_{2,4} = S_{2,5} = -1.155$.

3. По формуле Максвелла–Мора (2) находим коэффициенты податливости $b_{i,j}$. Промежуточные результаты заносим в таблицу:

μ	$S_{1,\mu}$	$S_{2,\mu}$	l_μ	$l_\mu S_{1,\mu}^2$	$l_\mu S_{1,\mu} S_{2,\mu}$	$l_\mu S_{2,\mu}^2$
1	0	0	1	0	0	0
2	0	1.155	1	0	0	1.333
3	-1	-0.577	1	1	0.577	0.333
4	0	-1.155	1	0	0	1.333
5	0	-1.155	1	0	0	1.333
$\sum_{\mu=1}^{5}$				1.000	0.577	4.333

Суммируя три последних столбца, получаем три коэффициента податливости, отнесенные к жесткости EF: $b_{1,1} = 1.000/(EF)$, $b_{1,2} = 0.577/(EF)$, $b_{2,2} = 4.333/(EF)$, и записываем их в виде симметричной матрицы

$$
B = \begin{pmatrix} 0.01 & 0.00577 \\ 0.00577 & 0.04333 \end{pmatrix}.
$$

4. Вычисляем собственные значения $\lambda_{1,2}$ матрицы B. Приравниваем нулю определитель

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\lambda & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Решаем квадратное уравнение и находим собственные значения: $\lambda_1 = 0.044305, \lambda_2 = 0.009028$.

6. Находим частоты собственных колебаний (круговые частоты): $\omega_1 = 1/\sqrt{m\lambda_1} = 1.584$ рад/с, $\omega_2 = 1/\sqrt{m\lambda_2} = 3.508$ рад/с.

Библиографический список

1. *Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С.* Теоретическая механика в примерах и задачах.Т.2. — М.: Наука, 1984.
2. *Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р.,* Курс теоретической механики. — СПб.:Лань, 1998.
3. *Вильке В.Г.* Теоретическая механика. — М.: Изд-во МГУ, 1998.
4. *Зимина О.В., Кириллов А.И., Сальникова Т.А.* Решебник. Высшая математика. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
5. *Кирсанов М.Н.* Решебник. Теоретическая механика/ Под ред. А. И. Кириллова. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
6. *Новожилов И.В., Зацепин М.Ф.* Типовые расчеты по теоретической механике на базе ЭВМ. — М.: Высшая школа, 1986.
7. *Павловский М.А., Акинфиева Л.Ю., Бойчук О.Ф.* Теоретическая механика. Динамика. — Киев: Выща шк., 1990.
8. *Розенблат Г.М.* Механика в задачах и решениях. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 160 с.
9. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учеб. пособие для техн. вузов / Яблонский А.А., Норейко С.С., Вольфсон С.А. и др.; Под ред. А.А.Яблонского.— 3-е изд — М.:Высшая школа, 1972.
10. *Тарг С.М.* Краткий курс теоретической механики. — М.: Высшая школа, 1998.
11. *Яблонский А.А., Норейко С.С.* Курс теории колебаний. — М.:

Учебное издание

КИРСАНОВ Михаил Николаевич

СБОРНИК ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАЧ по динамике

Компьютерный набор и верстка автора

I ЛР В 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 25.5.2002.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная В 1. Печать офсетная.
Усл.печ. л. 6. Уч.-изд. л. 6. Тираж 1000 экз. Заказ