1. $T = (\dot{\varphi}^2/2)a^2(m_1/3 + 6m_2\sin^2\varphi)$.

2. $T = (\dot{\varphi}^2/2)a^2(m_1/3 + (m_2 + 3m_3/8 + m_4)\sin^2\varphi)$.

3. $T = (\dot{\varphi}^2/2)a^2(2m_1/3 + (m_2 + m_3/2 + m_4)\sin^2\varphi)$.

4. $T = (\dot{\varphi}^2/2)(R^2(3m_1/2 + m_2 + m_3 + m_4/2) + a^2m_2 + 2Ram_2\sin\varphi)$.

5. $T = (\dot{\varphi}^2/2)a^2(m_1 + (-m_1 + 3m_2/2 + 2m_3 + 4m_4)\sin^2\varphi)$.

6. $T = (\dot{\varphi}^2/2)(3R^2m_1/2 + (R + 2a\sin\varphi)^2(m_2 + 3m_3/4)/2)$.

7. $T = (\dot{\varphi}^2/2)a^2(m_1 + (2m_2 + 3m_3/2)\sin^2\varphi)$.

8. $T = (\dot{\varphi}^2/2)a^2(m_1 + (m_2 + m_3/2 + 3m_4/2)\sin^2\varphi)$.

9. $T = (\dot{\varphi}^2/2)a^2(m_1(\cos\varphi + \sin\varphi)^2 + m_2(\sin\varphi - \cos\varphi)^2)$.

10. $T = (\dot{\varphi}^2/2)(3R^2m_1/2 + m_2(R^2 + aR\sin\varphi + a^2/3) + (3/8)\,m_3R^2)$.

12.3. Теорема об изменении кинетической энергии

Постановка задачи. *Механическая система, находящаяся в покое, под действием внешних сил приходит в движение. За некоторое время одно из тел системы перемещается на заданное расстояние. Найти скорости, приобретенные телами системы.*

План решения

1. Выражаем кинетическую энергию системы через скорость v_* тела, перемещение S_* которого задано.

2. Вычисляем сумму работ сил, приложенных к системе, на заданном перемещении. Перемещения точек приложения сил и углы поворота тел, к которым приложены моменты, выражаем через S_*.

3. Из теоремы об изменении кинетической энергии,

$$T_1 - T_0 = \sum_j A_j^e + \sum_j A_j^i, \qquad (1)$$

где $\sum_j A_j^e$, $\sum_j A_j^i$ — работа внешних и внутренних сил, определяем скорость v_*.

Пример. Механизм, состоящий из груза A, блока B и цилиндра C радиусом R_C, установлен на неподвижной призме (рис. 130). Под действием сил тяжести из состояния покоя механизм пришел в движение. Даны массы $m_A = 50$ кг, $m_B = 80$ кг, $m_C = 120$ кг, радиусы $R = 30$ см, $r = 10$ см, $R_C = r/2$, угол $\alpha = 75°$, радиус инерции блока $i = 15$ см, коэффициент трения качения цилиндра о наклонную плоскость $\delta = 2$ мм, коэффициент трения скольжения груза о горизонтальную поверхность $f = 0.1$. Трения на оси блока B нет. Нити, соединяющие блок с грузом и цилиндром, параллельны плоскостям, по которым перемещаются эти тела. Какую скорость развил груз A, переместившись на расстояние $S_A = 1.2$ м?

Решение

Применяем теорему об изменении кинетической энергии системы (1). Для рассматриваемой системы, состоящей из твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями, работа внутренних сил равна нулю:

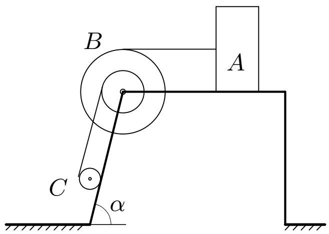


Рис. 130

$\sum_j A_j^i = 0$. В начальном положении все элементы механизма находились в покое, скорости всех тел были равны нулю, поэтому $T_0 = 0$. Кинетическая энергия T_1, которую получила система после того, как груз переместился вдоль горизонтальной поверхности на расстояние S_A, зависит от искомой скорости v_A.

1. Кинетическую энергию системы, состоящую из трех слагаемых

$$T_1 = T_A + T_B + T_C,$$

выражаем через скорость $v = v_A$. Груз A движется поступательно, следовательно, его кинетическая энергия равна $T_A = m_A v^2/2$. Тело B (блок) вращается относительно неподвижной оси: $T_B = J_B\omega_B^2/2$. Момент инерции блока относительно оси вращения вычисляем через заданный радиус инерции $J_B = i^2 m_B$. Угловую скорость ω_B необходимо выразить через искомую скорость v. Линейная скорость внешнего обода блока совпадает со скоростью груза v, так как обод связан нерастяжимой нитью с грузом. Для угловой скорости блока записываем формулу $\omega_B = v/R$. Выражаем T_B через скорость v:

$$T_B = \frac{m_B i^2 v^2}{2R^2}.$$

Тело C (цилиндр) совершает плоское движение, поэтому

$$T_C = \frac{m_C v_C^2}{2} + \frac{J_C\omega_C^2}{2},$$

v_C — скорость центра масс цилиндра, J_C — момент инерции цилиндра относительно центральной оси:

$$J_C = \frac{m_C R_C^2}{2} = \frac{m_C (r/2)^2}{2} = \frac{m_C r^2}{8}.$$

Выражаем v_C и ω_C через v. Точки внутреннего обода блока имеют скорость $r\omega_B$ или, выражая ω_B через скорость груза, vr/R (рис. 131).

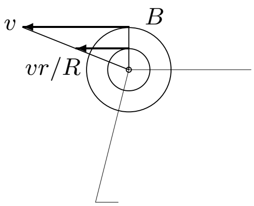


Рис. 131

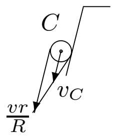


Рис. 132

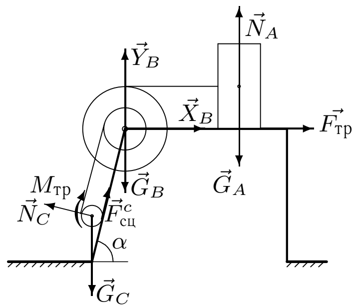


Рис. 133

Цилиндр катится без проскальзывания, поэтому точка его соприкосновения с призмой является мгновенным центром скоростей тела (рис. 132), отсюда для любого момента времени t

$$\dot{\varphi}_C(t) = \omega_C(t) = \frac{rv(t)}{2R_C R} = \frac{v(t)}{R}, \tag{2}$$

$$\dot{x}_C(t) = v_C(t) = R_C\omega_C(t) = \frac{v(t)}{R}\frac{r}{2}. \tag{3}$$

В результате находим кинетическую энергию цилиндра C:

$$T_C = \frac{m_C r^2 v^2}{8R^2} + \frac{m_C r^2}{8}\frac{v^2}{2R^2} = \frac{3}{16}m_C v^2 \frac{r^2}{R^2}.$$

Кинетическую энергию системы трех тел представляем в виде

$$T_1 = T_A + T_B + T_C = \frac{v^2}{2}\mu_{\text{прив}}, \tag{4}$$

где $\mu_{\text{прив}} = m_A + m_B i^2/R^2 + (3/8)\, m_C\, r^2/R^2$ — приведенная масса системы.

2. Находим сумму работ внешних сил. Изображаем действующие на систему силы (рис. 133). Реакции опор $\vec{N}_A, \vec{N}_C$ и вес $\vec{G}_A$ работы не совершают, так как они перпендикулярны перемещениям точек их приложения. Реакции оси $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$ и вес $\vec{G}_B$ приложены к неподвижным точкам, поэтому их работа также равна нулю. Аналогично, работа силы сцепления, приложенной к цилиндру C в точке касания, равна нулю. Находим сумму работ остальных сил:

$$\sum_{j=1}^{3} A_j = -F_{\text{тр}} S_A + G_C S_C \sin\alpha - M_{\text{тр}}\varphi_C,$$

где S_C и φ_C — соответственно, смещение центра тяжести и угол поворота цилиндра C. Находим силу трения скольжения груза A и момент трения качения цилиндра C. Имеем $F_{\text{тр}} = N_A f$, $M_{\text{тр}} = N_C \delta$, где N_A и N_C — соответствующие нормальные реакции. Проекция всех сил, действующих на тело A, на нормаль к поверхности равна нулю. Отсюда, $N_A = G_A$. Аналогично, из равенства нулю суммы проекций на нормаль к боковой поверхности призмы всех сил, действующих на цилиндр, получаем $N_C = G_C \cos\alpha$. В результате

$$F_{\text{тр}} = G_A f = m_A g f, \quad M_{\text{тр}} = N_C \delta = m_C g \delta \cos\alpha.$$

Так как $\dot{x}_A(t) = v_A(t)$, то интегрируя (2) и (3) при нулевых начальных условиях, получаем $S_C = S_A r/(2R)$, $\varphi_C = S_A/R$. Суммарную работу выражаем через S_A:

$$\sum_{j=1}^{3} A_j = -m_A g f S_A + m_C g \frac{S_A r}{2R} \sin\alpha - m_C g \delta \frac{S_A}{R} \cos\alpha. \tag{5}$$

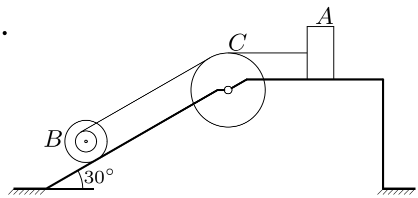
3. Кинетическую энергию (4) приравниваем сумме работ (5):

$$\frac{v^2}{2} \mu_{\text{прив}} = g S_A \left(-m_A f + m_C \sin\alpha \frac{r}{2R} - m_C \frac{\delta}{R} \cos\alpha \right).$$

Отсюда получаем: $v = 2.10$ м/с.

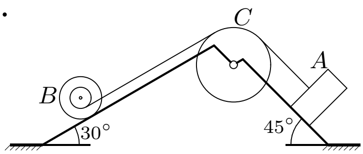
Условия задач. *Механизм, состоящий из груза A, блока B (больший радиус R, меньший r) и цилиндра С радиусом R_C, установлен на призме, закрепленной на плоскости. Под действием сил тяжести из состояния покоя механизм пришел в движение. Между грузом A и призмой имеется трение (кроме тех вариантов, где груз висит), качение цилиндра (блока) происходит без проскальзывания. Коэффициент трения скольжения груза о плоскость f, коэффициент трения качения цилиндра (блока) δ. Трения на неподвижной оси вращающегося блока (цилиндра) нет. Нити, соединяющие тела, параллельны плоскостям. Какую скорость развил груз A, переместившись на расстояние S_A?*

1.



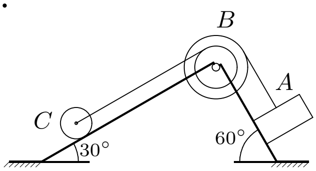
$R = 16$ см, $r = 8$ см,
$R_c = 28$ см, $f = 0.01$,
$i = 13$ см, $S_A = 1$ м,
$\delta = 0.1$ мм, $m_A = 6$ кг,
$m_B = 3$ кг, $m_C = 11$ кг.

2.



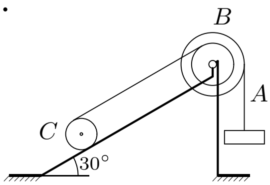
$R = 24$ см, $r = 12$ см,
$R_c = 42$ см, $f = 0.02$,
$i = 19$ см, $S_A = 2$ м,
$\delta = 0.2$ мм, $m_A = 9$ кг,
$m_B = 6$ кг, $m_C = 14$ кг.

3.



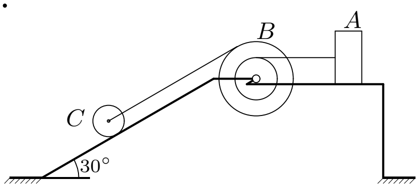
$R = 48$ см, $r = 32$ см,
$R_c = 24$ см, $f = 0.03$,
$i = 41$ см, $S_A = 1$ м,
$\delta = 0.3$ мм, $m_A = 6$ кг,
$m_B = 3$ кг, $m_C = 16$ кг.

4.



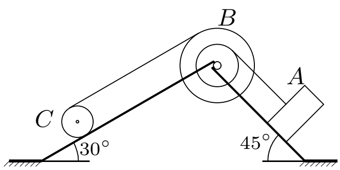
$R = 60$ см, $r = 40$ см,
$R_c = 30$ см, $i = 51$ см,
$S_A = 2$ м, $\delta = 0.4$ мм,
$m_A = 9$ кг, $m_B = 6$ кг,
$m_C = 19$ кг.

5.



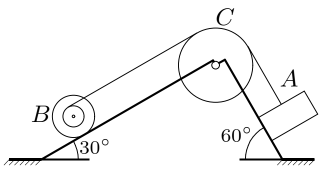
$R = 28$ см, $r = 16$ см,
$R_c = 12$ см, $f = 0.05$,
$i = 23$ см, $S_A = 1$ м,
$\delta = 0.1$ мм, $m_A = 6$ кг,
$m_B = 3$ кг, $m_C = 21$ кг.

6.



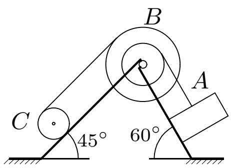
$R = 42$ см, $r = 24$ см,
$R_c = 18$ см, $f = 0.01$,
$i = 34$ см, $S_A = 2$ м,
$\delta = 0.2$ мм, $m_A = 9$ кг,
$m_B = 6$ кг, $m_C = 24$ кг.

7.



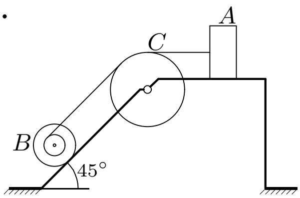
$R = 32$ см, $r = 16$ см,
$R_c = 56$ см, $f = 0.02$,
$i = 25$ см, $S_A = 1$ м,
$\delta = 0.3$ мм, $m_A = 6$ кг,
$m_B = 3$ кг, $m_C = 11$ кг.

8.



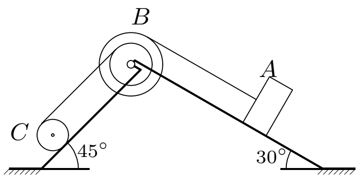
$R = 70$ см, $r = 40$ см,
$R_c = 30$ см, $f = 0.03$,
$i = 57$ см, $S_A = 2$ м,
$\delta = 0.4$ мм, $m_A = 12$ кг,
$m_B = 6$ кг, $m_C = 27$ кг.

9.



$R = 16$ см, $r = 8$ см,
$R_c = 28$ см, $f = 0.04$,
$i = 14$ см, $S_A = 1$ м,
$\delta = 0.1$ мм, $m_A = 9$ кг,
$m_B = 3$ кг, $m_C = 14$ кг.

10.



$R = 36$ см, $r = 24$ см,
$R_c = 18$ см, $f = 0.05$,
$i = 32$ см, $S_A = 2$ м,
$\delta = 0.2$ мм, $m_A = 12$ кг,
$m_B = 6$ кг, $m_C = 22$ кг.

Ответы

№	$\mu_{\text{прив}}$	$\sum_j A_j$	v_A	№	$\mu_{\text{прив}}$	$\sum_j A_j$	v_A
	кг	Нм	м/с		кг	Нм	м/с
1	13.714	9.211	1.159	6	48.604	79.504	1.159
2	55.042	4.474	0.403	7	13.647	40.560	0.403
3	18.855	0.350	0.193	8	55.192	119.894	0.193
4	16.502	114.307	3.722	9	18.354	10.333	3.722
5	108.668	177.056	1.805	10	20.407	5.674	1.805

12.4. Теорема о моменте количества движения системы

Постановка задачи. *Горизонтальная платформа, на которой расположено N материальных точек, свободно вращается вокруг вертикальной оси. Как изменится угловая скорость платформы, если в некоторый момент времени точки начнут перемещаться по платформе вокруг оси вращения с заданными скоростями ? Трением пренебречь.*

План решения

По условию задачи моменты M^e_{zi} всех внешних сил относительно оси вращения равны нулю (силы тяжести параллельны вертикальной оси, а реакции подшипников пересекают ось). Поэтому из теоремы об изменении момента количества движения [1] системы, записанной в проекции на ось вращения z,

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_i M^e_{zi},$$

следует закон *сохранения* момента количества движения системы

$$L_{z0} = L_{z1}, \tag{1}$$

где L_{z0} и L_{z1} — проекции момента количества движения системы на ось z до и после относительного движения точек.

[1] В общем курсе физики эта величина называется моментом импульса.