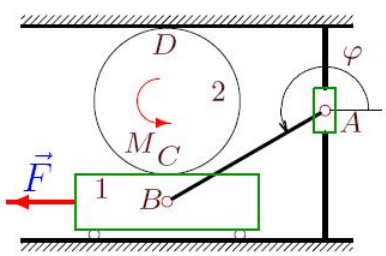
Решение механической задачи с одной степенью свободы с помощью уравнения Лагранжа 2-го рода

Глебова М. А.

25 июня 2009 г.



30.4.
По вертикальной направляющей движется муфта A, шарнирно соединенная с бруском. Верхней точкой обода диск касается горизонтальной поверхности, нижней – бруска массой m_1 на невесомых подшипниках. Масса диска m_2. AB $= a$. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять φ.

1 Уравнение Лагранжа

Уравнение Лагранжа второго рода для заданной системы имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q. \qquad (1)$$

Обобщённую силу будем искать как сумму вкладов консервативных и неконсервативных сил:

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + \tilde{Q}.$$

2 Механическая энергия системы

2.1 Кинетическая энергия

Кинетическая энергия системы имеет вид:

$$T = \frac{1}{2}m_1 v_B^2 + \frac{1}{2}m_2 v_O^2 + \frac{1}{4}m_1 R^2 \omega_2^2. \tag{2}$$

Выразим линейные и угловые скорости через обобщенную координату.

Рассмотрим графы

$$A \xrightarrow{\varphi, a} B,$$

$$\begin{cases} v_{Bx} = -a\dot{\varphi}\sin\varphi = v_{Cx}, \\ v_{By} = v_{Ay} + a\dot{\varphi}\cos\varphi = 0. \end{cases} \tag{3}$$

$$C \xrightarrow{\frac{\pi}{2}, R} O,$$

$$\begin{cases} v_{Ox} = v_{Cx} - R\omega_2 \sin\frac{\pi}{2}, \\ v_{Oy} = R\omega_2 \cos\frac{\pi}{2} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

$$O \xrightarrow{\frac{\pi}{2}, R} D,$$

$$\begin{cases} v_{Dx} = v_{Ox} - R\omega_2 \sin\frac{\pi}{2} = 0, \\ v_{Dy} = R\omega_2 \cos\frac{\pi}{2} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Получаем:

$$\begin{cases} v_{Ox} = -\frac{1}{2}\dot{\varphi} a \sin\varphi = v_O, \\ v_{Bx} = -\dot{\varphi} a \sin\varphi = v_B, \\ \omega_2 = -\frac{1}{2R}\dot{\varphi} a \sin\varphi. \end{cases} \tag{6}$$

Подставив 6 в 2, получаем:

$$T = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 a^2 \sin\varphi^2 (m_1 + \frac{3}{8}m_2). \tag{7}$$

2.2 Потенциальная энергия

$$\Pi = 0.$$

3 Обобщённая сила

$$Q = \frac{1}{\dot{\varphi}}(-Fv_{Bx} + M\omega_2). \tag{8}$$

С учётом 6 получаем:

$$Q = aF\sin\varphi - \frac{a}{2R}M\sin\varphi. \tag{9}$$

4 Уравнение Лагранжа

Подставив 7 и 9 в формулу 1:

$$(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi)a(m_1 + \frac{3}{8}m_2) = F - \frac{1}{2R}M. \tag{10}$$