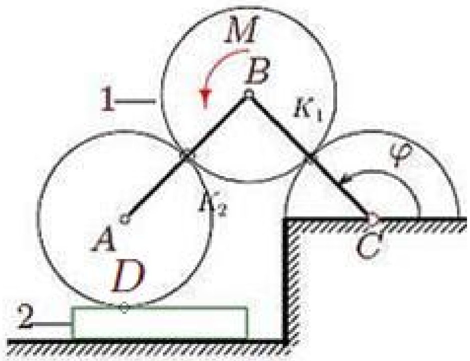
Решение механической задачи с одной степенью свободы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода

5 июля 2009 г.



Оси цилиндров A и B радиусами R, находящиеся в зацеплении, шарнирно соединены звеном AB. Цилиндр B массой m_1 катится по неподвижному цилиндру радиусом R, цилиндр A опирается на пластину массой m_2, скользящую по горизонтальной поверхности. К цилиндру B приложен момент M. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня CB φ.

1 Уравнение Лагранжа

Уравнение Лагранжа второго рода для заданной системы имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q. \tag{1}$$

Обобщённую силу будем искать как сумму вкладов консервативных и неконсервативных сил. Соответственно,

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + \widetilde{Q}.$$

2 Механическая энергия системы

2.1 Кинетическая энергия

Кинетическая энергия системы имеет вид:

$$T = \frac{1}{2}m_1 v_B^2 + \frac{1}{2}J\omega_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_D^2 \tag{2}$$

Угловую скорость верхнего цилиндра(с центром в B) обозначим за ω_1, нижнего(с центром в A) - за ω_2.
Выразим линейные и угловые скорости через обобщённые координаты. Для этого рассмотрим графы $C \to B \to K_1$, $B \to K_2 \to A \to D$, учитывая, что нижний диск(с центром A) движется по горизонтали и оба диска не проскальзывают: z

$$C \xrightarrow{\varphi, 2R} B \xrightarrow{\varphi+\pi, R} K_1$$

$$\left\{ \text{x: } 0 = -2R\dot{\varphi}\sin\varphi - R\omega_1 \sin(\varphi + \pi) \right. \tag{3}$$

Очевидно, что

$$\begin{cases} v_{Bx} = -2R\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ v_{By} = 2R\dot{\varphi}\cos\varphi, \end{cases} \tag{4}$$

$$B \xrightarrow{2\pi-\varphi, R} K_2 \xrightarrow{2\pi-\varphi, R} A \xrightarrow{\frac{3\pi}{2}, R} D$$

$$\begin{cases} v_{Dx} = -2R\dot{\varphi}\sin\varphi - 2R\dot{\varphi}\sin(2\pi - \varphi) - R\omega_2 \sin(2\pi - \varphi) - R\omega_2 \sin\frac{3\pi}{2}, \\ 0 = +2R\dot{\varphi}\cos\varphi + 2R\dot{\varphi}\cos(2\pi - \varphi) + R\omega_2 \cos(2\pi - \varphi) + R\omega_2 \cos\frac{3\pi}{2}, \end{cases} \tag{5}$$

Получим:

$$\begin{cases} v_D = v_{Dx} = -4R\dot{\varphi}\sin\varphi - 4R\dot{\varphi}, \\ \omega_1 = 2\dot{\varphi}, \\ \omega_2 = -4\dot{\varphi}. \end{cases} \tag{6}$$

Момент инерции диска, квадраты скоростей первого диска и пластины:

$$J = \frac{1}{2}m_1 R^2, v_B^2 = v_{Bx}^2 + v_{By}^2 = 4R^2\dot{\varphi}^2, v_D^2 = 16R^2\dot{\varphi}^2(\sin\varphi + 1)^2 \tag{7}$$

Подставляя 6 и 7 в 2, получим выражение для кинетической энергии системы через обобщённую координату φ:

$$T = 3m_1R^2\dot{\varphi}^2 + 8m_2R^2\dot{\varphi}^2(\sin\varphi + 1)^2. \tag{8}$$

2.2 Потенциальная энергия

Система находится в поле сил тяжести Земли, второй диск движется в горизонтальной плоскости. За нулевой уровень потенциальной энергии примем горизонталь, проходящую через точку . Тогда потенциальная энергия системы будет равна потенциальной энергии второго первого:

$$\Pi = 2m_2gR\sin(\pi - \varphi) = 2m_2gR\sin\varphi. \tag{9}$$

3 Обобщённая сила

$$Q = -\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} + \widetilde{Q} \tag{10}$$

$$-\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = -2m_1gR\cos\varphi$$

Мощность неконсервативных сил:

$$N = (\vec{M}, \vec{\omega_1}) = M\omega_1 = 2M\dot{\varphi},$$

откуда

$$\widetilde{Q} = 2M.$$

В итоге вид обощённой силы:

$$Q = 2M - 2m_1gR\cos\varphi \tag{11}$$

4 Уравнения Лагранжа

Подставляя 11 и 8 в 1 получим:

$$6m_1R^2\ddot{\varphi}+48m_2R^2\dot{\varphi}^2(1+\sin\varphi)\cos\varphi+16m_2R^2\ddot{\varphi}(1+\sin\varphi)^2 = 2M-2m_1gR\cos\varphi.$$