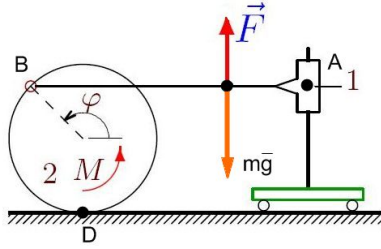


Решение механической задачи с одной степенью свободы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода



30.3. К муфте массой m_1 , движущейся по вертикальной стойке, закрепленной на тележке, жестко прикреплена горизонтальная тяга, шарнирно соединенная с ободом диска. Масса диска m_2 , радиус R . Момент M приложен к диску, сила F - к тяге. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять φ .

1 Уравнение Лагранжа

Уравнение Лагранжа второго рода для заданной системы имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q. \quad (1)$$

2 Кинетическая энергия

Для определения кинетической энергии системы выражу скорости тел через обобщенную координату:

Составлю граф $D \xrightarrow{\frac{\pi}{2}, R} O$, где D - точка касания диска с неподвижной поверхностью:

$$\begin{cases} v_{Ox} = -R\dot{\varphi} \sin \frac{\pi}{2}, \\ v_{Oy} = R\dot{\varphi} \cos \frac{\pi}{2} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Составлю граф $O \xrightarrow{\varphi, R} B$

$$\begin{cases} v_{Bx} = v_{Ox} - R\dot{\varphi} \sin \varphi, \\ v_{By} = R\dot{\varphi} \cos \varphi. \end{cases} \quad (3)$$

Найду общую кинетическую энергию: $T = T_1 + T_2$

Кинетическая энергия стержня-энергия поступательного движения:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m_1 (v_{Bx}^2 + v_{By}^2) = \\ &= \frac{1}{2} m_1 R^2 \dot{\varphi}^2 (1 + 2 \sin \varphi + 1) = m_1 R^2 \dot{\varphi}^2 (1 + \sin \varphi). \end{aligned} \quad (4)$$

Кинетическая энергия диска находится как сумма энергий поступательного и вращательного движения (относительно центра масс):

$$T_2 = \frac{1}{2}\omega_2^2 J + \frac{1}{2}m_2 \dot{x}^2 = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 \left(\frac{1}{2}m_2 R^2\right) + \frac{1}{2}m_2 (R\dot{\varphi})^2 = \frac{3}{4}m_2 R^2 \dot{\varphi}^2. \quad (5)$$

Кинетическая энергия системы:

$$T = m_1 R^2 \dot{\varphi}^2 (1 + \sin \varphi) + \frac{3}{4}m_2 R^2 \dot{\varphi}^2. \quad (6)$$

3 Обобщенная сила

$$Q = \frac{N}{\dot{\varphi}} \quad (7)$$

$$N = F v_{By} + M \omega_2 - m_1 g v_{By} \quad (8)$$

$$Q = FR \cos \varphi + M - m_1 g R \cos \varphi \quad (9)$$

4 Уравнение Лагранжа

$$\frac{3}{2}m_2 R^2 \ddot{\varphi} + m_1 R^2 (2\ddot{\varphi}(1 + \sin \varphi) + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) = FR \cos \varphi + M - m_1 g R \cos \varphi \quad (10)$$