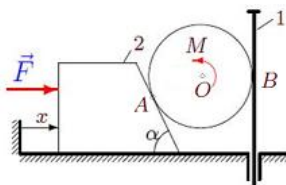


# Решение механической задачи с одной степенью свободы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода

4 июля 2009 г.



Цилиндр радиусом  $R$  касается вертикального штока массы  $m_1$  и призмы, скользящей по горизонтальной плоскости. Масса призмы  $m_2$ . К призме приложена горизонтальная сила  $F$ , к цилиндру — момент  $M$ . Шток движется в направляющих без сопротивления. Проскальзывание в точках контакта цилиндра отсутствует. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять смещение призмы  $x$ .

## 1 Уравнение Лагранжа

Уравнение Лагранжа второго рода для заданной системы имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q. \quad (1)$$

Обобщённую силу будем искать как сумму вкладов консервативных и неконсервативных сил. Соответственно,

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + \tilde{Q}.$$

## 2 Механическая энергия системы

### 2.1 Кинетическая энергия

Кинетическая энергия системы имеет вид:

$$T = \frac{1}{2}m_1v_B^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2 \quad (2)$$

Угловую скорость цилиндра обозначим за  $\omega$ .

Выразим линейные и угловые скорости через обобщённые координаты. Для этого рассмотрим графы  $A \rightarrow O \rightarrow B$

$$A \xrightarrow{\frac{\pi}{2}-\alpha, R} O \xrightarrow{0, R} B$$

$$\begin{cases} 0 = \dot{x} - R\omega \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) - R\omega \sin 0 = \dot{x} - R\omega \cos \alpha, \\ v_B = R\omega \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) + R\omega = R\omega(1 + \sin \alpha). \end{cases} \quad (3)$$

Получим:

$$\begin{cases} \omega = \frac{\dot{x}}{R \cos \alpha}, \\ v_B = \dot{x} \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}. \end{cases} \quad (4)$$

Подставляя 4 в 2, получим выражение для кинетической энергии системы через обобщённую координату  $x$ :

$$T = \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2\left(\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^2. \quad (5)$$

Мощность неконсервативных сил:

$$N = (\vec{M}, \vec{\omega}) + (\vec{F}, \vec{\dot{x}}) = \dot{x} \frac{M}{R \cos \alpha} + \dot{x} F$$

В итоге вид обобщённой силы:

$$Q = \frac{M}{R \cos \alpha} + F \quad (6)$$

### 3 Уравнения Лагранжа

Подставляя 6 и 5 в 1 получим:

$$\ddot{x}[m_2 + m_1(\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha})^2] = F + \frac{M}{R \cos \alpha}.$$