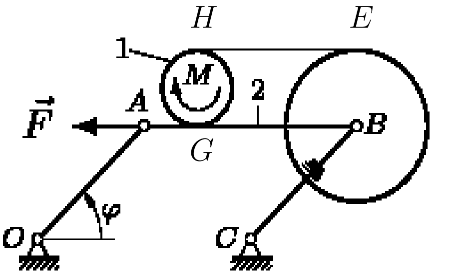
Решение задачи с одной степенью свободы с помощью уравнений Лагранжа II-го рода.



На горизонтальном стержне AB шарнирного параллелограмма $OABC$ расположен цилиндр радиуса r массой m_1, связанный нитью с цилиндром B радиуса $2r$. Стержень BC жёстко соединён с цилиндром B. К меньшему цилиндру приложен момент M, к шарниру A - горизонтальная сила F; $OA = CB = a$. Масса стержня AB равна m_2. Составить уравнение движения системы. За обобщённую координату принять угол φ.

Решение:

Уравнение Лагранжа II-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q$$

Кинетическая энергия:

$$T = \frac{1}{2}m_2 V_A^2 + \frac{1}{2}m_1 V_D^2 + \frac{1}{2}J_D\omega^2$$

V_A - скорость точки A,
V_D - скорость центра масс малого цилиндра,
$J_D = \frac{m_1 r^2}{2}$ - момент инерции малого цилиндра относительно центра масс,
т. D - центр масс малого цилиндра (на рисунке не указана).

Определим скорость точки A. Для этого составим граф:

$$O \xrightarrow[a]{\varphi} A$$

$$x: \quad V_{Ax} = -a\dot{\varphi}\sin(\varphi) \qquad (1)$$
$$y: \quad V_{Ay} = a\dot{\varphi}\cos(\varphi) \qquad (2)$$

Квадрат скорости точки A:

$$V_A^2 = V_{Ax}^2 + V_{Ay}^2 = a^2\dot{\varphi}^2$$

Определим скорость центра масс меньшего цилиндра, а также его угловую скорость вращения относительно центра масс. Для этого мы составим следующий граф:

$$C \xrightarrow[a]{\varphi} B \xrightarrow[2r]{\frac{\pi}{2}} E \xrightarrow[L]{\pi} H \xrightarrow[r]{\frac{3\pi}{2}} D$$

$$x: \quad V_{Dx} = -a\dot{\varphi}\sin(\varphi) - 2r\dot{\varphi} + r\omega \tag{3}$$
$$y: \quad V_{Dy} = a\dot{\varphi}\cos(\varphi) \tag{4}$$

Для нахождения угловой скорости вращения цилиндра, нам необходимо взять следующий граф:

$$G \xrightarrow[r]{\frac{\pi}{2}} D$$

$$x: \quad V_{Dx} = -a\dot{\varphi}\sin(\varphi) - r\omega \tag{5}$$

где т. G - точка соприкосновения цилиндра со стержнем AB.

Сравнивая формулы (3) и (5), находим угловую скорость вращения:

$$\omega = \dot{\varphi} \tag{6}$$

Используя формулы (3)(4), с учётом (6), находим квадрат скорости центра масс цилиндра:

$$V_D^2 = V_{Dx}^2 + V_{Dy}^2 = a^2\dot{\varphi}^2 + 2ar\dot{\varphi}^2\sin(\varphi) + r^2\dot{\varphi}^2$$

Кинетическая энергия пример вид:

$$T = \frac{1}{2}\left(\left(m_1 + m_2\right)a^2 + 2m_1 ar\sin(\varphi) + \frac{3}{2}m_1 r^2\right)\dot{\varphi}^2 \tag{7}$$

Обобщённая сила:

$$Q = \frac{-FV_{Ax} - M\omega - \left(m_1 + m_2\right)gV_{Ay}}{\dot{\varphi}} = Fa\sin(\varphi) - M - \left(m_1 + m_2\right)ga\cos(\varphi) \tag{8}$$

Подставим полученную кинетическую энергию (7) и обобщённую силу (8) в исходное уравнение Лагранжа II-го рода. Оно примет вид:

$$\left(\left(m_1 + m_2\right)a^2 + 2m_1 ar\sin(\varphi) + \frac{3}{2}m_1 r^2\right)\ddot{\varphi} = Fa\sin(\varphi) - M - \left(m_1 + m_2\right)ga\cos(\varphi) \tag{9}$$