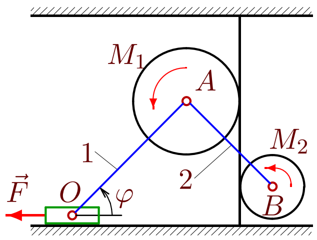
Мокробородов Я.В. С-12-07

Решение механической задачи с одной степенью свободы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода



30.3. Цилиндры A и B, соединенные стержнем AB, катятся по вертикальной стойке. Радиусы цилиндров R и r. Ползун, шарнирно закрепленный на конце стержня OA, скользит по горизонтальной плоскости. К цилиндрам приложены моменты M_1 и M_2, к ползуну – горизонтальная сила $\vec{F}$; $OA = a$. Масса стержня OA равна m_1, масса стержня AB – m_2. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня OA φ.

Решение

Выразим скорости тел через обобщенную координату:

Составим граф: $O \xrightarrow[a]{\varphi} A$

$$x: \quad V_{Ax} = V_{Ox} - a\dot{\varphi}\sin\varphi \tag{1}$$

$$y: \quad V_{Ay} = V_{Oy} + a\dot{\varphi}\cos\varphi \tag{2}$$

Где

$$V_{Ax} = 0 \tag{3}$$

$$V_{Oy} = 0 \tag{4}$$

Получим

$$V_A = a\dot{\varphi}\cos\varphi \tag{5}$$

$$V_O = a\dot{\varphi}\sin\varphi \tag{6}$$

Причем, т.к. цилиндры A и B катятся по вертикальной стойке без проскальзывания, то

$$V_A = -\omega_{Az}R = \omega_{Bz}r = V_B \tag{7}$$

$$\omega_{ABz} = 0 \tag{8}$$

Получим

$$V_A = a\dot{\varphi}\cos\varphi = -\omega_{Az}R = \omega_{Bz}r \tag{9}$$

Тогда

$$\omega_{Az} = \frac{-a\dot{\varphi}\cos\varphi}{R} \tag{10}$$

$$\omega_{Bz} = \frac{a\dot{\varphi}\cos\varphi}{r} \tag{11}$$

Найдем скорость центра масс стержня OA:

Составим граф $O \xrightarrow[a/2]{\varphi} A_1$

$$x: \quad V_{OAx} = V_{Ox} - \frac{a}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi \tag{12}$$

$$y: \quad V_{OAy} = V_{Oy} + \frac{a}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi \tag{13}$$

Подставим

$$(4) \longrightarrow (13)$$
$$(6) \longrightarrow (12)$$

Получим

$$V_{OAx} = \frac{a}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi \tag{14}$$

$$V_{OAy} = \frac{a}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi \tag{15}$$

После возведения в квадрат и сложения получим:

$$V_{OA}^2 = \frac{a^2}{4}\dot{\varphi}^2 \tag{16}$$

Составим кинетическую энергию системы:
С учетом того, первый стержень совершает плоское движение, а второй стержень движется поступательно получим:

$$T = \frac{1}{2}m_1V_{OA}^2 + \frac{a^2}{24}m_1\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_2V_A^2 \tag{17}$$

Подставим

$$(9),(16) \longrightarrow 17$$

Получим

$$T = \frac{a^2}{6}m_1\dot{\varphi}^2 + \frac{a^2}{2}m_2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi \tag{18}$$

Вычислим обобщенную силу:

$$Q = \frac{\partial(-FV_{Ox} - m_1 g V_{OAy} - m_2 g V_{Ay} + M_1\omega_{Az} + M_2\omega_{Bz})}{\partial\dot{\varphi}} \tag{19}$$

Подставим:

$$(5),(6),(10),(11),(15) \longrightarrow 19$$

Получим

$$Q = -Fa\cos\varphi - m_1 g\frac{a}{2}\cos\varphi - m_2 ga\cos\varphi - \frac{M_1 a\cos\varphi}{R} + \frac{M_2 a\cos\varphi}{r} \tag{20}$$

Уравнение Лагранжа 2-го рода :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = Q \tag{21}$$

Подставим

$$(18),(20) \longrightarrow 21$$

Получим

$$\tfrac{a^2}{3}m_1\ddot{\varphi} + a^2 m_2\ddot{\varphi}\cos^2\varphi - 3a^2 m_2\dot{\varphi}^2\sin 2\varphi =$$

$$= -Fa\cos\varphi - m_1 g\frac{a}{2}\cos\varphi - m_2 ga\cos\varphi - \frac{M_1 a\cos\varphi}{R} + \frac{M_2 a\cos\varphi}{r} \tag{22}$$