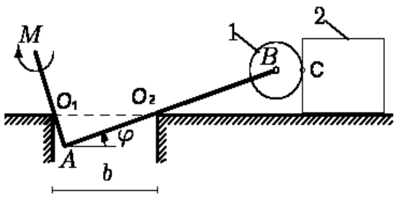
Решение задачи с одной степенью свободы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.



Невесомый уголок, составленный из двух жестко соединенных взаимно перпендикулярных стержней, опирается на гладкие опоры. Диск радиуса r, закрепленный на конце стержня длиной $AB = a$, катится по боковой поверхности груза, скользящего по гладкой плоскости. К уголку приложен момент M. Масса диска равна m_1, груза — m_2. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота уголка φ.

РЕШЕНИЕ

Общее уравнение Лагранжа 2-го рода выглядит следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q,$$

где T — кинетическая энергия, Q — обобщенная сила.

Кинетическая энергия:

$$T = \frac{1}{2}m_1 V_B^2 + \frac{1}{2}J_B\omega_1^2 + \frac{1}{2}m_2 V_{C_x}^2,$$

где $J_B = \frac{1}{2}m_2 r^2$ — момент инерции диска относительно центра.

Из прямоугольного треугольника O_1AO_2 с гипотенузой b и острым углом φ находим, что $O_1A = b\sin(\varphi) = l_1$ и $O_2A = b\cos(\varphi) = l_2$.

Выразим скорости тел через обобщенную координату.

Составим граф (для этого графа берем проекции на оси: x_1, сонаправленную с вектором AO_2, и y_1, сонаправленную с вектором AO_1):

$O_1 \xrightarrow[l_1]{-\pi/2} A \xrightarrow[l_2]{0} O_2$

$$x_1 : V_{O_2x_1} = V_{O_1x_1} - \dot{\varphi}l_1\sin(-\frac{\pi}{2}) - \dot{\varphi}l_2\sin(0) \quad (1)$$

$$y_1 : V_{O_2y_1} = V_{O_1y_1} - \dot{\varphi}l_1\cos(-\frac{\pi}{2}) - \dot{\varphi}l_2\cos(0) \quad (2)$$

Так как $V_{O_1x_1} = 0$, $\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$, $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ и $V_{O_2y_1} = 0$, то получим: $V_{O_2x_1} = \dot{\varphi}l_1 = \dot{\varphi}b\sin(\varphi)$ и $V_{O_1y_1} = -\dot{\varphi}l_2 = -\dot{\varphi}b\cos(\varphi)$.

Перепроектируем $V_{O_2x_1}$ на координатные оси:

$$x: \qquad V_{O_2x} = \dot\varphi b\sin(\varphi)\cos(\varphi) \tag{3}$$
$$y: \qquad V_{O_2x} = \dot\varphi b\sin^2(\varphi). \tag{4}$$

Составим граф: $O_2 \xrightarrow[a-b\cos(\varphi)]{\varphi} B$

$$x: \qquad V_{B_x} = \dot\varphi b\sin(\varphi)\cos(\varphi) - \dot\varphi a\sin(\varphi) + \dot\varphi b\sin(\varphi)\cos(\varphi) \tag{5}$$
$$y: \qquad V_{B_y} = \dot\varphi b\sin^2(\varphi) + \dot\varphi a\cos(\varphi) - \dot\varphi b\cos^2(\varphi) \tag{6}$$

Получим:

$$V_{B_x} = \dot\varphi b\sin(2\varphi) - \dot\varphi a\sin(\varphi) \tag{7}$$
$$V_{B_y} = \dot\varphi a\cos(\varphi) - \dot\varphi b\cos(2\varphi) \tag{8}$$

Далее составим граф: $B \xrightarrow[r]{0} C$

$$x: \qquad V_{C_x} = \dot\varphi b\sin(2\varphi) - \dot\varphi a\sin(\varphi) - \omega_1 r\sin(0) \tag{9}$$
$$y: \qquad V_{C_y} = \dot\varphi a\cos(\varphi) - \dot\varphi b\cos(2\varphi) + \omega_1 r\cos(0) \tag{10}$$

Так как $V_{C_y} = 0$, $\sin(0) = 0$ и $\cos(0) = 1$, то получим:

$$V_{C_x} = \dot\varphi b\sin(2\varphi) - \dot\varphi a\sin(\varphi) \tag{11}$$
$$\omega_1 = \dot\varphi(b\cos(2\varphi) - a\cos(\varphi))/r \tag{12}$$

С учетом полученных скоростей, кинетическая энергия запишется в виде:

$$T = \frac{\dot\varphi^2}{2}(A_1\sin^2(2\varphi) + A_2\cos^2(2\varphi) + A_3\sin^2(\varphi)) +$$
$$+\frac{\dot\varphi^2}{2}(A_4\cos^2(\varphi) - A_5\sin^2(\varphi)\cos^2(\varphi) - A_6\sin^2(2\varphi)\cos^2(2\varphi))$$

где:

$$A_1 = b^2(m_1 + m_2) \tag{13}$$
$$A_2 = a^2(m_1 + m_2) \tag{14}$$
$$A_3 = 2ab(m_1 + m_2) \tag{15}$$
$$A_4 = \tfrac{3}{2}m_1 a^2 \tag{16}$$
$$A_5 = \tfrac{3}{2}m_1 b^2 \tag{17}$$
$$A_6 = 3m_1 ab \tag{18}$$

Обобщенная сила:

$$Q = \frac{1}{\dot\varphi}(M\dot\varphi - m_1 g(\dot\varphi a\cos(\varphi) - \dot\varphi b\cos(2\varphi))) \tag{19}$$

$$Q = M - m_1 g(a\cos(\varphi) - b\cos(2\varphi)) \tag{20}$$

Вычислив все производные, получим искомое уравнение движения:

$$\begin{gathered}\ddot\varphi(A_1\sin^2(2\varphi) + A_2\cos^2(2\varphi) + A_3\sin^2(\varphi) + A_4\cos^2(\varphi) - \\ -A_5\sin^2(\varphi)\cos^2(\varphi) - A_6\sin^2(2\varphi)\cos^2(2\varphi)) \\ +\frac{\dot\varphi^2}{2}((2(A_1+A_2)\sin(4\varphi) + (A_3+A_4)\sin(2\varphi) + \\ +(A_6-2A_5)\cos(2\varphi)\sin(\varphi) + (2A_6-A_5)\sin(2\varphi)\cos(\varphi)) = \\ = M - m_1 g(a\cos(\varphi) - b\cos(2\varphi))\end{gathered} \tag{21}$$

Замечание. Если не пользоваться графами, то эта задача решается значительно проще. Например, высота точки B имеет вид $y_B = (a - b\cos\varphi)\sin\varphi$. Дифференцируя сразу получаем (8).