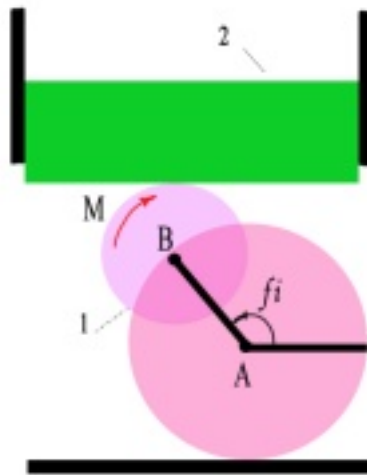


Решение механической задачи с одной степенью свободы с помощью уравнения Лагранжа 2-ого рода

Савченко И. Е.



На ободе диска A радиусом R шарнирно закреплен диск B радиусом r , массой m_1 . Диск A катится по горизонтальной поверхности, диск B — по нижней поверхности вертикально перемещающегося поршня массой m_2 . К диску B приложен момент M . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота диска A φ .

1 Кинетическая Энергия

Кинетическая энергия будет иметь вид:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{J_1 \omega_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2}$$

Точка O является мгновенным центром скоростей и из этого следует, что $V_O = 0$. Чтобы найти скорости в точках B и C рассмотрим графы:

$$O \xrightarrow{\frac{\pi}{2}, R} A \xrightarrow{\varphi, R} B,$$

$$\begin{cases} v_{Bx} = V_{Ox} - R\dot{\varphi} \sin \frac{\pi}{2} - R\dot{\varphi} \sin \varphi \\ v_{By} = V_{Oy} + R\dot{\varphi} \cos \frac{\pi}{2} + R\dot{\varphi} \cos \varphi \end{cases} \quad (1)$$

$$B \xrightarrow{\frac{\pi}{2}, r} C,$$

$$\begin{cases} v_{Cx} = V_{Bx} - r\omega \sin(\frac{\pi}{2}) \\ v_{Cy} = V_{By} + r\omega \cos(\frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad (2)$$

После упрощения выражений получим:

$$\begin{cases} v_{Cx} = -R\dot{\varphi} - R\dot{\varphi} \sin \varphi - r\omega \\ v_{Cy} = R\dot{\varphi} \cos \varphi \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} v_{Bx} = -R\dot{\varphi} - R\dot{\varphi} \sin \varphi \\ v_{By} = R\dot{\varphi} \cos \varphi \end{cases} \quad (4)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} V_{By} &= V_{Cy} = R\dot{\varphi} \cos \varphi; \\ V_{Cx} &= 0. \end{aligned}$$

Тогда кинетическая энергия имеет вид:

$$T = R^2 \dot{\varphi}^2 \left[m_1 \left(2(1 + \sin \varphi) + \frac{1}{2}(1 + \sin \varphi)^2 \right) + m_2 \cos \varphi \right]$$

2 Обобщённая сила

$$Q = M \frac{R}{r} (1 + \sin \varphi) - (m_1 + m_2) g R \cos \varphi. \quad (5)$$

3 Уравнение Лагранжа 2-ого рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q. \quad (6)$$

Для данной задачи уравнение Лагранжа имеет вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} R^2 \left(2m_1 (1 + \sin \varphi) + m_2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} m_1 (1 + \sin \varphi) \right) + \\ + \frac{1}{2} R^2 \dot{\varphi}^2 (m_1 \cos \varphi (3 + \sin \varphi) - 2m_2 \cos \varphi \sin \varphi) = \\ = M \frac{R}{r} (1 + \sin \varphi) - (m_1 + m_2) g R \cos \varphi \end{aligned}$$