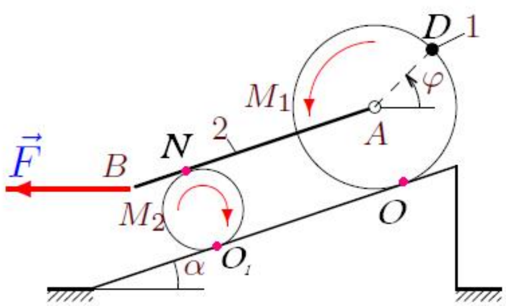
Решение механической задачи с одной степенью свободы с помощью уравнения Лагранжа 2-ого рода



30.21. Два цилиндра катятся по плоскости, наклоненной под углом α. Точка массой m_1 расположена на ободе невесомого цилиндра A радиусом R. Стержень AB массой m_2 лежит на невесомом цилиндре C радиусом $R/2$. Момент M_1 приложен к цилиндру A, момент M_2 — к цилиндру C, горизонтальная сила F — к стержню. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота φ цилиндра A.

1 Кинетическая Энергия

Весомый стержень совершает поступательное движение, т.к. O_1, O - МЦС то скорости точек A и N параллельны линии AB, а по теореме о проекциях скоростей точек АТТ на прямую, их соединяющую, получаем

$$\overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{V_N},$$

$$\omega_{1z} = \omega_{2z} = \dot{\varphi}.$$

Кинетическая энергия будет иметь вид:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{m_1 V_D^2}{2} + \frac{m_2 V_A^2}{2}$$

,

Точка O является мгновенным центром скоростей. Чтобы найти скорости в точке A рассмотрим граф:

$$O \xrightarrow{\frac{\pi}{2}+\alpha, R} A,$$

$$\begin{cases} V_{Ax} = V_{Ox} - R\dot{\varphi}\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) \\ V_{Ay} = V_{Oy} + R\dot{\varphi}\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} V_{Ax} = -R\dot{\varphi}\cos\alpha \\ V_{Ay} = -R\dot{\varphi}\sin\alpha \end{cases} \tag{2}$$

$$V_A^2 = \dot{\varphi}^2 R^2$$

$$A \xrightarrow{\varphi, R} D,$$

$$\begin{cases} V_{Dx} = -R\dot{\varphi}\cos\alpha - R\dot{\varphi}\sin\varphi \\ V_{Dy} = -R\dot{\varphi}\sin\alpha + R\dot{\varphi}\cos\varphi \end{cases} \tag{3}$$

Нетрудно получить:

$$V_D^2 = 2\dot{\varphi}^2 R^2 (1 + \sin(\alpha - \varphi))$$

Тогда кинетическая энергия имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} R^2 \dot{\varphi}^2 \left[2m_1 \left(1 + \sin(\alpha - \varphi)\right) + m_2\right]$$

2 Обобщённая сила

$$Q = M_1 - M_2 + m_2 g R \sin\alpha + F R \cos\alpha - m_1 g R(\cos\varphi - \sin\alpha). \tag{4}$$

3 Уравнение Лагранжа 2-ого рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q. \tag{5}$$

Для данной задачи уравнение Лагранжа имеет вид:

$$\ddot{\varphi} R^2 \left(2m_1(1 + \sin(\alpha - \varphi)) + m_2)\right) -$$

$$-R^2 \dot{\varphi}^2 m_1 (2\cos\varphi - \cos(\alpha - \varphi)) =$$

$$= M_1 - M_2 + m_2 g R \sin\alpha + F R \cos\alpha - m_1 g R(\cos\varphi - \sin\alpha)$$