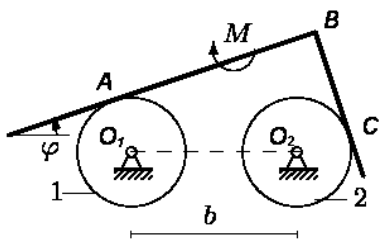
Решение задачи с одной степенью свободы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.



Невесомый уголок, составленный из двух жестко соединенных взаимно перпендикулярных стержней, опирается без проскальзывания на два диска радиусов R с неподвижными осями. Расстояние между осями, находящимися на одной высоте, равно b. Массы дисков m_1 и m_2. К уголку приложен момент M. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота уголка φ.

Решение

Общее уравнение Лагранжа 2-го рода выглядит следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q,$$

где T - кинетическая энергия, Q - обобщенная сила.

Для данной задачи кинетическая энергия находится следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} J_{O_1}\omega_1^2 + \frac{1}{2} J_{O_2}\omega_2^2,$$

где $J_{O_1} = \frac{1}{2}m_1R^2$ - момент инерции первого диска относительно центра, а $J_{O_2} = \frac{1}{2}m_2R^2$ - момент инерции второго диска относительно центра.

Из геометрических построений находим, что $AB = R + b\cos(\varphi) = d$ и $BC = R + b\sin(\varphi) = l$

Выразим скорости тел через обобщенную координату.

Составим граф: $O_1 \xrightarrow[R]{\pi/2+\varphi} A \xrightarrow[d]{\varphi} B \xrightarrow[l]{\pi/2+\varphi} C$

$C \xrightarrow[R]{\varphi} O_2$

$$x: \quad V_{O_{2_x}} = V_{O_{1_x}} - \omega_1 R\sin(\varphi + \tfrac{\pi}{2}) - \dot{\varphi} d\sin(\varphi) - \dot{\varphi} l\sin(\varphi + \tfrac{\pi}{2}) - \omega_2 R\sin(\varphi) \quad (1)$$

$$y: \quad V_{O_{2_y}} = V_{O_{1_y}} + \omega_1 R\cos(\varphi + \tfrac{\pi}{2}) - \dot{\varphi} d\cos(\varphi) - \dot{\varphi} l\cos(\varphi + \tfrac{\pi}{2}) - \omega_2 R\cos(\varphi) \quad (2)$$

Учитывая, что $V_{O_{1_x}} = V_{O_{1_y}} = V_{O_{2_x}} = V_{O_{2_y}} = 0$, $\sin(\varphi + \frac{\pi}{2}) = \cos(\varphi)$ и $\cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\varphi)$, находим отсюда ω_1 и ω_2:

$$\omega_1 = -\tfrac{\dot{\varphi} l}{R} = -\tfrac{\dot{\varphi}(R + b\sin(\varphi))}{R} \tag{3}$$

$$\omega_2 = -\tfrac{\dot{\varphi} d}{R} = -\tfrac{\dot{\varphi}(R + b\cos(\varphi))}{R} \tag{4}$$

Кинетическая энергия в общем виде с учетом полученных угловых скоростей:

$$T = \frac{\dot{\varphi}^2}{4}\left(A_1 \sin^2(\varphi) + A_2 \sin(\varphi) + A_3 \cos(\varphi) + A_4\right),$$

где:

$$A_1 = b^2(m_1 - m_2) \tag{5}$$

$$A_2 = 2m_1 bR \tag{6}$$

$$A_3 = 2m_2 bR \tag{7}$$

$$A_4 = (m_1 + m_2)R^2 + m_2 b^2 \tag{8}$$

Обобщенная сила:

$$Q = (-M\dot{\varphi})/\dot{\varphi}, \tag{9}$$

$$Q = -M \tag{10}$$

Вычислив все производные, получим искомое уравнение движения:

$$\frac{\ddot{\varphi}}{2}(A_1 \sin^2(\varphi) + A_2 \sin(\varphi) + A_3 \cos(\varphi) + A_4) + \frac{\dot{\varphi}}{4}(A_1 \sin(2\varphi) + A_2 \cos(\varphi) - A_3 \sin(\varphi)) = -M$$