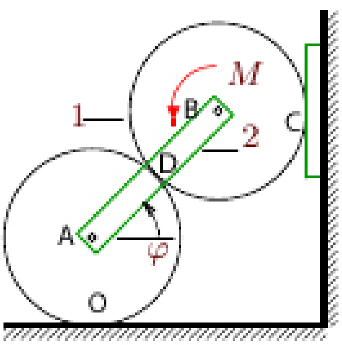
Решение механической задачи с одной степенью свободы

30 июля 2009 г.



30.7. Оси цилиндров соединены спарником. Верхний цилиндр катится без проскальзывания по пластинке, скользящей по вертикальной плоскости. Нижний цилиндр находится в зацеплении с верхним и катится по горизонтальной поверхности. Радиусы цилиндров R. Масса верхнего цилиндра m_1, масса спарника m_2. К верхнему цилиндру приложен момент M. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота спарника φ.

1 Уравнение Лагранжа

Уравнение Лагранжа второго рода для заданной системы имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \widetilde{Q}. \tag{1}$$

Где L=T-П

Кинетическая энергия системы равна:

$$T = \frac{1}{2}m_1 v_B^2 + \frac{1}{2}m_1 v_D^2 + \frac{1}{2}J_B\omega_1^2 + \frac{1}{2} + J_D\omega_2^2 \tag{2}$$

Потенциальная энергия системы равна:

$$\Pi = m_1 g(R + 2Rsin\varphi) + m_2 g(R + Rsin\varphi). \tag{3}$$

Рассмотрим граф

$$O \xrightarrow{\frac{\pi}{2},R} A \xrightarrow{\varphi,2R} B,$$

$$\begin{cases} v_{Bx} = v_{Ox} - R\omega_{3z}\sin\frac{\pi}{2} - 2R\dot{\varphi}\sin\varphi = 0, \\ v_{By} = v_{Oy} + R\omega_{3z}\cos\frac{\pi}{2} + 2R\dot{\varphi}\cos\varphi. \end{cases} \tag{4}$$

Откуда

$$\begin{cases} v_{By} = 2R\omega_{2z}\cos\varphi, \\ \omega_{3z} = -2\omega_{2z}\sin\varphi = -2\dot{\varphi}\sin\varphi. \end{cases} \tag{5}$$

Также рассмотрим граф

$$O \xrightarrow{\frac{\pi}{2},R} A \xrightarrow{\varphi,R} D,$$

$$\begin{cases} v_{Dx} = v_{Ox} - R\omega_{3z}\sin\frac{\pi}{2} - R\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ v_{Dy} = v_{Oy} + R\omega_{3z}\cos\frac{\pi}{2} + R\dot{\varphi}\cos\varphi, \end{cases} \tag{6}$$

Откуда

$$\begin{cases} {v_D}^2 = R^2{\omega_{3z}}^2 + 2\omega_{2z}\omega_{3z}R^2 sin\varphi + R^2{\omega_{2z}}^2, \end{cases} \tag{7}$$

И граф

$$O \xrightarrow{\frac{\pi}{2},R} A \xrightarrow{\varphi,2R} B \xrightarrow{0,R} C,$$

$$\begin{cases} v_{Cx} = v_{Ox} - R\omega_{3z}\sin\frac{\pi}{2} - 2R\dot{\varphi}\sin\varphi - R\omega_{1z}\sin 0 = 0, \\ v_{Cy} = v_{Oy} + R\omega_{3z}\cos\frac{\pi}{2} + 2R\dot{\varphi}\cos\varphi + R\omega_{1z}\cos 0, \end{cases} \tag{8}$$

Откуда

$$\begin{cases} v_C = R\omega_{1z} + 2\omega_{2z}Rcos\varphi, \end{cases} \tag{9}$$

Так как цилиндры 1 и 3 не проскальзывают, то возможно составить граф, проходящий через точку их соприкосновения D:

$$A \xrightarrow{\varphi,2R} B \xrightarrow{\pi+\varphi,R} D \xrightarrow{\pi+\varphi,R} A,$$

$$v_{Ax} = v_{Ax} - 2R\dot{\varphi}\sin(\varphi) - R\omega_{1z}\sin(\varphi+\pi) - R\omega_{3z}\sin(\varphi+\pi).$$

$$v_{Ay} = v_{Ay} + 2R\dot{\varphi}\cos(\varphi) + R\omega_{1z}\cos(\varphi+\pi) + R\omega_{3z}\cos(\varphi+\pi) = 0.$$

Откуда получаем, что:

$$\omega_{1z} = 2\dot{\varphi} - \omega_{3z}.$$

Таким образом угловые скорости:

$$\omega_{2z} = \dot{\varphi}.$$

$$\omega_{3z} = -2\dot{\varphi} sin\varphi.$$
$$\omega_{1z} = 2\dot{\varphi}(1 - sin\varphi)$$

Кинетическая энергия после подстановок и преобразований принимает вид:

$$T = 2m_1\dot{\varphi}^2 R^2 cos\varphi^2 + \frac{2}{3}m_2 R^2\dot{\varphi}^2 + m_1 R^2\dot{\varphi}^2 - m_1 R^2 sin\varphi^2\dot{\varphi}^2.$$

2 Вклад непотенциальных сил в обобщенную силу

Мощность неконсервативных сил:

$$N = (\vec{M}, \vec{\omega_1}) = M\omega_{1z}.$$

Откуда получаем:

$$\widetilde{Q} = \frac{M\omega_{1z}}{\dot{\varphi}} = 2M(1 - sin\varphi) \tag{10}$$

3 Составление уравнения Лагранжа

Составим L:

$$L = T - \Pi = 2m_1\dot{\varphi}^2 R^2 cos\varphi^2 + \frac{2}{3}m_2 R^2\dot{\varphi}^2 + m_1 R^2\dot{\varphi}^2 -$$
$$-m_1 R^2 sin\varphi^2\dot{\varphi}^2 - (m_1 g(R + 2Rsin\varphi) + m_2 g(R + Rsin\varphi)).$$

Уравнение Лагранжа второго рода для заданной системы имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = \widetilde{Q}.$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = 4m_1R^2(cos\varphi)^2\ddot{\varphi} - 4m_1R^2(\dot{\varphi})^2 sin2\varphi + \frac{4}{3}m_2R^2\ddot{\varphi} + 2m_1R^2\ddot{\varphi} -$$
$$-\ddot{\varphi}2m_1R^2(sin\varphi)^2 - 2m_1R^2(\dot{\varphi})^2 sin2\varphi.$$
$$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = -2m_1(\dot{\varphi})^2R^2 sin2\varphi - m_1R^2(\dot{\varphi})^2 sin2\varphi - 2m_1gRcos\varphi - m_2gRcos\varphi$$

Таким образом уравнение Лагранжа имеет вид:

$$4m_1R^2(cos\varphi)^2\ddot{\varphi} - 3m_1R^2(\dot{\varphi})^2 sin2\varphi + \frac{4}{3}m_2R^2\ddot{\varphi} + 2m_1R^2\ddot{\varphi} - \ddot{\varphi}2m_1R^2(sin\varphi)^2 +$$
$$+2m_1gRcos\varphi + m_2gRcos\varphi = 2M(1 - sin\varphi)$$