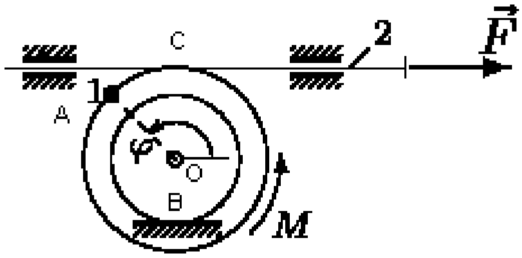
Решение механической задачи с одной степенью свободы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода

23 июня 2009 г.



30.5. Внутренним ободом блок катится по неподвижной поверхности, внешним — касается подвижного штока. На блоке расположена точка массой m_1. Радиусы блока R и r. Масса штока m_2. К блоку приложен момент M, к штоку — сила F. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять φ.

Уравнение Лагранжа второго рода для заданной системы имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q. \tag{1}$$

Обобщённую силу будем искать как сумму вкладов консервативных и неконсервативных сил. Соответственно,

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + \widetilde{Q}.$$

Таким образом, для решения задачи необходимо выразить кинетическую и потенциальную энергии как функции обобщённой координаты и скорости

$$T = T(\dot{\varphi}, \varphi), \qquad \Pi = \Pi(\varphi).$$

1 Механическая энергия системы

1.1 Кинетическая энергия

Кинетическая энергия системы равна:

$$T = \frac{1}{2}m_1 v_A^2 + \frac{1}{2}m_2 v_C^2. \tag{2}$$

1.2 Выражение кинетической энергии через обобщённую координату

Выразим линейные скорости через обобщенную координату.

Рассмотрим граф

$$B \xrightarrow{\frac{\pi}{2},R} O$$

$$\begin{cases} v_{Ox} = v_{Bx} - r\dot{\varphi}\sin\frac{\pi}{2} = 0, \\ v_{Oy} = v_{By} + r\dot{\varphi}\cos\frac{\pi}{2} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Откуда

$$\begin{cases} v_{Ox} = -r\dot{\varphi}, \\ v_{Oy} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Рассмотрим граф

$$O \xrightarrow{(\varphi),R} A$$

$$\begin{cases} v_{Ax} = -(r\dot{\varphi} + R\dot{\varphi}\sin\varphi), \\ v_{Ay} = R\dot{\varphi}\cos\varphi. \end{cases} \tag{5}$$

Откуда

$$\left\{ v_{Ax}^2 = \dot{\varphi}(r^2 + 2rR\sin\varphi + R^2), \right. \tag{6}$$

Рассмотрим граф

$$O \xrightarrow{\frac{\pi}{2},R} C$$

$$\begin{cases} v_{Cx} = -r\dot{\varphi} - R\dot{\varphi}\sin\frac{\pi}{2}, \\ v_{Cy} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Откуда

$$\left\{ v_C = v_{Cx} = -(r+R)\dot{\varphi}, \right. \tag{8}$$

Таким образом выражение для кинетической энергии 2 примет вид:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{\varphi}(r^2 + 2rR\sin\varphi + R^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{\varphi}^2(R+r)^2. \tag{9}$$

2 Обобщённая сила

$$Q = -F(r + R) + M - m_1 g R \cos\varphi. \tag{10}$$