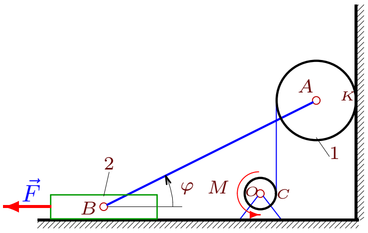
Камчатова Е.Н. С-11-05

Решение механической задачи с одной степенью свободы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода



№30.3. На одном конце стержня AB длиной a шарнирно закреплен ползун B, скользящий по горизонтальной поверхности, на другом — цилиндр радиуса R массой m_1. Цилиндр катится по вертикальной стенке. Вертикальная нить огибает цилиндр и диск радиуса r, закрепленный на основании. Масса ползуна B равна m_2. К диску приложен момент M, к ползуну — горизонтальная сила F. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня φ.

Решение:

Выразим скорости тел через обобщенную координату:

Составим граф $O \xrightarrow[r]{0} C$:

$$x: \quad V_{Cx} = V_{Ox} - r\omega_{2z}\sin(0),$$
$$y: \quad V_{Cy} = V_{Oy} + r\omega_{2z}\cos(0).$$

Составим граф[1] $A \xrightarrow[a]{\pi+\varphi} B$:

$$x: \quad V_{Bx} = V_{Ax} - a\dot{\varphi}\sin(\pi+\varphi),$$
$$y: \quad V_{By} = V_{Ay} + a\dot{\varphi}\cos(\pi+\varphi).$$

Составим граф $A \xrightarrow[R]{0} K$:

$$x: \quad V_{Kx} = V_{Ax} - R\omega_{1z}\sin(0),$$
$$y: \quad V_{Ky} = V_{Ay} + R\omega_{1z}\cos(0).$$

Так как из графов видно, что $-R\omega_{1z} = a\cos(\varphi)\dot{\varphi}$, то $\omega_{1z} = -\frac{a\cos(\varphi)\dot{\varphi}}{R}$.
$V_{Cy} = V_{Ay}$, следовательно, $-R\omega_{1z} = r\omega_{2z}$, тогда $\omega_{2z} = -\frac{R\omega_{1z}}{r}$.
Запишем кинетическую энергию системы:

$$T = \frac{3}{4}m_1a^2\cos(\varphi)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_2a^2\sin(\varphi)^2\dot{\varphi}^2.$$

Запишем мощность системы:

$$N = -Fa\dot{\varphi}\sin(\varphi) + M\frac{a\dot{\varphi}\cos(\varphi)}{r} - m_1g\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

[1] Замечание преподавателя. Лучше $B \xrightarrow[a]{\varphi} A$

Обобщенная сила:

$$Q = -Fa\sin(\varphi) + M\frac{a\cos(\varphi)}{r} - m_1 g\cos\varphi.$$

Уравнение Лагранжа 2-го рода :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = Q,$$

$$\left(-\frac{3}{2}m_1 + m_2\right)\sin(2\varphi)a^2\dot{\varphi}^2/2 + \left(\frac{3}{2}m_1\cos^2(\varphi) + m_2\sin^2(\varphi)\right)a^2\ddot{\varphi} =$$

$$= -Fa\sin(\varphi) + M\frac{a\cos(\varphi)}{r} - m_1 g\cos\varphi.$$