1 Постановка задачи

Задача 30.4. На конце стержня AC, вращающегося вокруг оси B, шарнирно закреплена муфта A массой m_1 и моментом инерции J_1 . Муфта скользит по стержню KD, качающемуся вокруг оси D. На другом конце стержня AC закреплен ползун C, скользящий по поверхности горизонтального поршня. Масса ползуна C равна m_2 . К стержню KD приложен момент M , к штоку поршня - горизонтальная сила F . Дано: $AB = BD = a, BC = b$. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня DK φ.

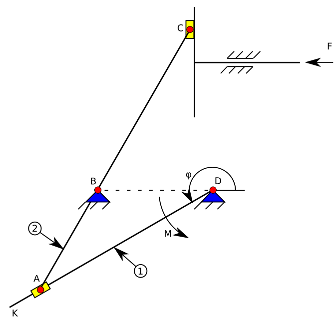

Рис. 1: Постановка задачи

2 Ход решения

2.1 Вычисление энергии системы

1. Запишем выражение для кинетической энергии :

$$T = \frac{m_1 V_a^2}{2} + \frac{J \dot{\varphi_A}^2}{2} + \frac{m_2 V_c^2}{2} \tag{1}$$

2.2 Кинематика системы

1. Введем обозначение $\gamma = \varphi - \pi$

2. Рассмотрим треугольник ABD, из которого найдем, что угол поворота второго тела $\varphi_2 = 2\gamma$, продифференцируем данное соотношение и получим,что $\omega_2 = 2\dot{\varphi}$

3. Запишем граф $B \underset{\pi+2\gamma,\, a}{\longrightarrow} A$, из которого найдем скорость точки A

$$V_{Ax} = 2\,a\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\varphi\,(t)\right)\,\sin\left(2\,\varphi\,(t)\right) \tag{2}$$

$$V_{Ay} = -2\,a\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\varphi\,(t)\right)\,\cos\left(2\,\varphi\,(t)\right) \tag{3}$$

4. Для нахождения скорости точки C запишем граф $B \underset{2\gamma, b}{\longrightarrow} C$

$$V_{Cx} = -2\,b\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\varphi\,(t)\right)\,\sin\left(2\,\varphi\,(t)\right) \tag{4}$$

$$V_{Cy} = 2\,b\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\varphi\,(t)\right)\,\cos\left(2\,\varphi\,(t)\right) \tag{5}$$

2.3 Уравнение Лагранжа

1. Запишем компоненты уравнения лагранжа для данной системы (кинетическая энергия была записана ранее - см. уравнение (1)) :

$$Q = M + 2\,b\,\sin\left(2\,\varphi\,(t)\right)\,F + \left(2\,a\,g\,m_1 - 2\,b\,g\,m_2\right)\,\cos\left(2\,\varphi\,(t)\right) \tag{6}$$

2. Кинетическая энергия с учетом подстановки скоростей будет выглядеть следующим образом:

$$T = \frac{\left(4\,b^2\,m_2 + 4\,a^2\,m_1 + J_1\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\varphi\,(t)\right)^2}{2} \tag{7}$$

3. В результате получаем выражение для уравнения Лагранжа :

$$\begin{aligned}\left(4\,b^2\,m_2 + 4\,a^2\,m_1 + J_1\right)\,\ddot{\varphi}\,(t) = \\ = M + 2\,b\,\sin\left(2\,\varphi\,(t)\right)\,F + 2\,g\,\left(a\,m_1 - b\,m_2\right)\,\cos\left(2\,\varphi\,(t)\right)\end{aligned} \tag{8}$$