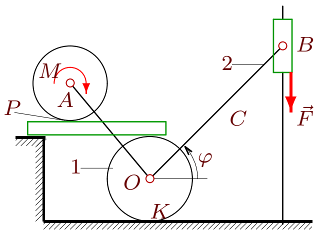
Кутаев А.Н. С-11-07

Решение механической задачи с одной степенью свободы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода



30.18. Цилиндр радиусом R соединен стержнем OB с вертикально движущейся муфтой. Горизонтальная пластина, находящаяся в зацеплении с цилиндром, левым концом скользит по гладкой опоре. По пластине катится диск радиусом r. Оси цилиндра и диска соединены стержнем OA. К муфте приложена вертикальная сила $\vec{F}$, к диску — момент M; $OA = a$, $OB = b$, $OC = \frac{b}{2}$. Точка — центр масс стержня OB. Масса цилиндра равна m_1, масса стержня OB — m_2. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня OB φ.

Решение

Выразим скорости тел через обобщенную координату:

Составим граф: $K \xrightarrow[R]{\pi/2} O$

$$x: \quad V_{Ox} = V_{Kx} - R\omega_1 \sin(\pi/2) \tag{1}$$

$$y: \quad V_{Oy} = V_{Ky} + R\omega_1 \cos(\pi/2) \tag{2}$$

Где

$$V_{Kx} = 0 \tag{3}$$

$$V_{Ky} = 0 \tag{4}$$

$$V_{Oy} = 0 \tag{5}$$

Получим

$$V_{Ox} = -R\omega_1 \sin(\pi/2) \tag{6}$$

Составим граф: $O \xrightarrow[b]{\varphi} B$

$$x: \quad V_{Bx} = V_{Ox} - b\dot{\varphi}\sin\varphi \tag{7}$$

$$y: \quad V_{By} = V_{Oy} + b\dot{\varphi}\cos\varphi \tag{8}$$

Где

$$V_{Bx} = 0 \tag{9}$$

$$V_{Oy} = 0 \tag{10}$$

Получим

$$\omega_1 = -\frac{b}{R}\dot{\varphi}\sin\varphi \tag{11}$$

$$V_{By} = b\dot{\varphi}\cos\varphi \tag{12}$$

Составим граф: $O \xrightarrow[b/2]{\varphi} C$

$$x: \quad V_{Cx} = V_{Ox} - \frac{b}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi \tag{13}$$

$$y: \quad V_{Cy} = V_{Oy} + \frac{b}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi \tag{14}$$

Получим

$$V_{Cx} = -\frac{b}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi \tag{15}$$

$$V_{Cy} = \frac{b}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi \tag{16}$$

После возведения в квадрат и сложения получим:

$$V_C^2 = \frac{b^2}{4}\dot{\varphi}^2 \tag{17}$$

$$V_O^2 = b^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi^2 \tag{18}$$

Момент инерции цилиндра

$$I_1 = \frac{1}{2}m_1R^2 \tag{19}$$

Момент инерции стержня:

$$I_2 = \frac{1}{12}(m_2b^2) \tag{20}$$

Составим кинетическую энергию системы:
С учетом того, весомый стержень совершает плоское движение, а цилиндр движется поступательно и вращательно получим:

$$T = \frac{1}{2}m_1V_O^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_C^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\varphi}^2 \tag{21}$$

Подставим

$$(11),(17),(18),(19),(20) \longrightarrow (21)$$

Получим

$$T = \frac{3}{4} m_1 b^2 \dot{\varphi}^2 \sin\varphi^2 + \frac{b^2}{6} m_2 \dot{\varphi}^2 \tag{22}$$

Составим граф: $P \xrightarrow[r]{\pi/2} A$

$$x: \quad V_{Ax} = V_{Px} - r\omega_{3z} \sin(\pi/2). \tag{23}$$

Для поступательного движения стержня OA имеем $V_{Ax} = V_{Ox}$. Кроме того $V_{Px} = 2V_{Ox} = 2\dot{\varphi} b \sin\varphi$. Найдем угловую скорость диска $\omega_{3z} = \dot{\varphi}(b/r)\sin\varphi$.

Вычислим обобщенную силу:

$$Q = \frac{\partial(-M\omega_{3z} - m_2 g \dot{\varphi} \frac{b}{2} \cos\varphi - F\dot{\varphi} b \cos\varphi)}{\partial\dot{\varphi}} \tag{24}$$

Получим

$$Q = -M\frac{b}{r}\sin\varphi - m_2 g \frac{b}{2}\cos\varphi - Fb\cos\varphi \tag{25}$$

Уравнение Лагранжа 2-го рода :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = Q \tag{26}$$

Подставим

$$(22),(24) \longrightarrow 25$$

Получим

$$\tfrac{3b^2}{2} m_1 \ddot{\varphi} \sin\varphi^2 + \tfrac{b^2}{3} m_2 \ddot{\varphi} + \tfrac{3b^2}{2} m_1 \dot{\varphi}^2 \sin\varphi\cos\varphi =$$

$$= -M\frac{b}{r}\sin\varphi - m_2 g\frac{b}{2}\cos\varphi - Fb\cos\varphi \tag{27}$$