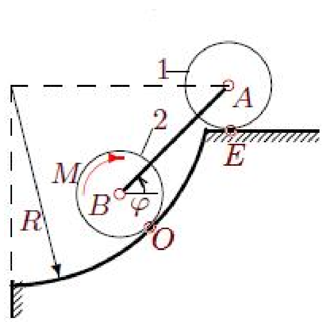
Решение механической задачи с одной степенью свободы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода

30 июня 2009 г.



Оси двух дисков радиусами r соединены стержнем длиной $4r$. Диск A массой m_1 катится по горизонтальной поверхности, другой, массой m_2, — по цилиндрической поверхности радиусом $R = 5r$. К диску B приложен момент M. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня φ.

1 Уравнение Лагранжа

Уравнение Лагранжа второго рода для заданной системы имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q. \tag{1}$$

Обобщённую силу будем искать как сумму вкладов консервативных и неконсервативных сил. Соответственно,

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + \widetilde{Q}.$$

2 Механическая энергия системы

2.1 Кинетическая энергия

Кинетическая энергия системы имеет вид:

$$T = \frac{1}{2}m_1 v_A^2 + \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_B^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 \tag{2}$$

Выразим линейные и угловые скорости через обобщённые координаты. Для этого рассмотрим графы $B \to A$, $O \to B$, $E \to A$, учитывая что, диск 1 движется по горизонтали, и оба диска не проскальзывают:

$$B \xrightarrow{\varphi, 4R} A$$

$$\begin{cases} v_{Ax} = v_{Bx} - 4r\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ v_{Ay} = v_{By} + 4r\dot{\varphi}\cos\varphi, \\ v_{Ay} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

$$O \xrightarrow{\pi-\varphi, r} B$$

$$\begin{cases} v_{Bx} = v_{Ox} - \omega_2 r\sin(\pi-\varphi), \\ v_{By} = v_{Oy} + \omega_2 r\cos(\pi-\varphi), \\ v_{Ox} = 0, v_{Oy} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

$$E \xrightarrow{\frac{\pi}{2}, r} A$$

$$\begin{cases} v_{Ax} = v_{Ex} - r\omega_1\sin\frac{\pi}{2}, \\ v_{Ay} = v_{Ey} + r\omega_1\cos\frac{\pi}{2}, \\ v_{Ex} = 0, v_{Ey} = 0, v_{Ay} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Получим:

$$\begin{cases} v_{Ax} = -8r\dot{\varphi}\sin\varphi = v_A, \\ v_{Bx} = -4r\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ v_{By} = -4r\dot{\varphi}\cos\varphi, \\ \omega_1 = 8\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ \omega_2 = 4\dot{\varphi}. \end{cases} \tag{6}$$

Моменты инерции дисков и полная линейная скорость второго диска:

$$J_1 = \frac{1}{2}m_1 r^2, \frac{1}{2}m_2 r^2, v_B^2 = v_{Bx}^2 + v_{By}^2 = 16r^2\dot{\varphi}^2 \tag{7}$$

Подставляя 6 и 7 в 2, получим выражение для кинетической энергии системы через обобщённую координату φ:

$$T = 34m_1 r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + 9m_2 r^2\dot{\varphi}^2. \tag{8}$$

2.2 Потенциальная энергия

Система находится в поле сил тяжести Земли, первый диск движется в горизонтальной плоскости. За нулевой уровень потенциальной энергии примем горизонталь, проходящую через точку A. Тогда потенциальная энергия системы будет равна потенциальной энергии второго тела:

$$\Pi = -4rm_2 g \sin\varphi. \tag{9}$$

3 Обобщённая сила

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + \widetilde{Q} \tag{10}$$

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 4rm_2 g \cos\varphi$$

Мощность неконсервативных сил:

$$N = (\vec{M}, \vec{\omega_2}) = -M\omega_2 = -M4\dot{\varphi},$$

откуда

$$\widetilde{Q} = -4M.$$

В итоге вид обощённой силы:

$$Q = 4rm_2 g \cos\varphi - 4M \tag{11}$$

4 Уравнения Лагранжа

Подставляя 11 и 8 в 1 получим:

$$\ddot{\varphi} r^2 (68m_1 \sin^2\varphi + 18m_2) + \dot{\varphi}^2 68m_1 r^2 \sin\varphi\cos\varphi = 4(rm_2 g \cos\varphi - M).$$