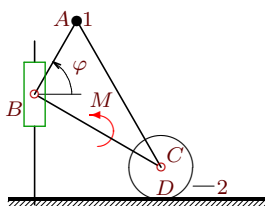


Решение механической задачи с одной степенью свободы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода



30.2. Треугольная пластина шарнирно прикреплена к муфте, скользящей по вертикальной направляющей, и диску радиусом R .

Масса точки на вершине A равна m_1 , масса диска — m_2 . $AB = a$, $BC = b$, $AB \perp BC$. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять φ .

РЕШЕНИЕ

Выразим скорости тел через обобщенную координату:

Составим граф: $B \xrightarrow[3\pi/2+\varphi]{b} C$

$$x: \quad V_{Cx} = V_{Bx} - b\dot{\varphi} \sin(3\pi/2 + \varphi) \quad (1)$$

$$y: \quad V_{Cy} = V_{By} + b\dot{\varphi} \cos(3\pi/2 + \varphi) \quad (2)$$

Где

$$V_{Cy} = 0 \quad (3)$$

$$V_{Bx} = 0 \quad (4)$$

Получим

$$V_{By} = -b\dot{\varphi} \cos(3\pi/2 + \varphi) = -b\dot{\varphi} \sin \varphi \quad (5)$$

$$V_{Cx} = -b\dot{\varphi} \sin(3\pi/2 + \varphi) = b\dot{\varphi} \cos \varphi \quad (6)$$

Составим граф: $B \xrightarrow[a]{\varphi} A$

$$x: \quad V_{Ax} = V_{Bx} - a\dot{\varphi} \sin \varphi \quad (7)$$

$$y: \quad V_{Ay} = V_{By} + a\dot{\varphi} \cos \varphi \quad (8)$$

Где

$$V_{Bx} = 0 \quad (9)$$

$$V_{By} = -b\dot{\varphi} \sin \varphi \quad (10)$$

Получим

$$V_{Ax} = a\dot{\varphi} \sin \varphi \quad (11)$$

$$V_{Ay} = -b\dot{\varphi} \sin \varphi - a\dot{\varphi} \cos \varphi \quad (12)$$

После возведения в квадрат и сложения получим:

$$V_A^2 = a^2\dot{\varphi}^2 + b^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + ab\dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi \quad (13)$$

$$V_C^2 = b^2\dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi \quad (14)$$

$$V_B^2 = a^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi \quad (15)$$

Найдем угловую скорость вращения диска 2.

Для этого составим граф: $D \xrightarrow{\pi/2} C$

$$x : \quad V_{Cx} = V_{Dx} - R\omega_2 \quad (16)$$

Где

$$V_{Dx} = 0 \quad (17)$$

Получим

$$\omega_2 = -\frac{b\dot{\varphi} \cos \varphi}{R} \quad (18)$$

Момент инерции диска:

$$I = \frac{1}{2}m_2R^2 \quad (19)$$

Составим кинетическую энергию системы:

С учетом того, первый стержень совершает плоское движение, а второй стержень движется поступательно получим:

$$T = \frac{1}{2}m_1V_A^2 + \frac{1}{2}I\omega_2^2 + \frac{1}{2}m_2V_C^2 \quad (20)$$

Подставим

$$(13),(14),(18),(19) \longrightarrow (20)$$

Получим

$$T = \frac{1}{2}m_1(a^2\dot{\varphi}^2 + b^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + ab\dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi) + \frac{3b^2}{4}m_2\dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi \quad (21)$$

Вычислим обобщенную силу:

$$Q = \frac{\partial(-m_1gV_{Ay} + M\dot{\varphi})}{\partial\dot{\varphi}} \quad (22)$$

Подставим:

$$(12) \longrightarrow (22)$$

Получим

$$Q = m_1 g b \sin \varphi + m_1 g a \cos \varphi + M \quad (23)$$

Уравнение Лагранжа 2-го рода :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q \quad (24)$$

Подставим

$$(21), (23) \longrightarrow 24$$

Получим

$$\begin{aligned} b^2 m_1 \ddot{\varphi} - b^2 m_1 \ddot{\varphi} \cos \varphi^2 + b^2 m_1 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi + b a m_1 \ddot{\varphi} \sin 2\varphi + \\ b a m_1 \dot{\varphi}^2 \cos 2\varphi + \frac{3b^2}{2} m_2 \ddot{\varphi} \cos \varphi^2 - \frac{3b^2}{2} m_2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi = \\ = m_1 g b \sin \varphi + m_1 g a \cos \varphi + M \end{aligned} \quad (25)$$