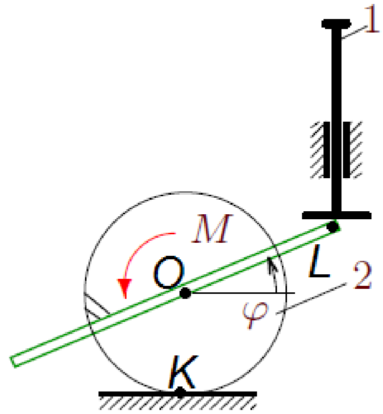
Решение механической задачи с одной степенью свободы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода

Сметанин С.А.



30.18. Шток массой m_1 свободно движется в вертикальных направляющих. Стержень, жестко скрепленный с цилиндром массой m_2, скользит одним концом по нижней поверхности штока. К цилиндру приложен момент M. Радиус цилиндра R, длина стержня $2a$. Центр стержня соединен с центром цилиндра. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота цилиндра φ.

Решение

1. Кинетическая энергия

Для определения кинетической энергии системы выразим скорости тел через обобщенную координату:

Из графа $K \xrightarrow[R]{\pi/2} O$ получим: $V_O = V_{Ox} = \dot{\varphi} R$.

Для графа $O \xrightarrow[a]{\varphi} L$ имеем:

$x: \quad V_{Lx} = V_{Ox} - \dot{\varphi} a \sin\varphi,$
получаем: $\quad V_{Lx} = \dot{\varphi}(R - a\sin\varphi),$
$y: \quad V_{Ly} = \dot{\varphi} a \cos\varphi,$
Для штока имеем только вертикальную составляющую V_{Ly}.

Т.к. цилиндр 2 совершает качение, то для него кинетическая энергия имеет следующий вид:

$$T_2 = \frac{1}{2}m_1 V_O^2 + \frac{1}{2}J_O\dot{\varphi}^2,$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m_1(\dot{\varphi}R)^2 + \frac{m_1(\dot{\varphi}R)^2}{4},$$

$$T_2 = \frac{3m_1(\dot{\varphi}R)^2}{4}.$$

Для штока, совершающего плоское движение получим:

$$T_1 = \frac{1}{2}m_2 V_{Ly}^2 = \frac{1}{2}m_2(\dot{\varphi}a\cos\varphi)^2.$$

Тогда общая кинетическая энергия имеет вид:

$$T = T_1 + T_2 = 3\frac{m_1(\dot{\varphi}R)^2}{4} + \frac{1}{2}m_2(\dot{\varphi}a\cos\varphi)^2.$$

Обобщенная сила

$$Q = M - m_2 g a\cos\varphi.$$

Уравнение Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = Q,$$

$$\frac{3}{2}m_1\ddot{\varphi}R^2 + m_2\ddot{\varphi}(a\cos\varphi)^2 - m_2\dot{\varphi}^2a^2\cos\varphi\sin\varphi = M - m_2 g a\cos\varphi.$$