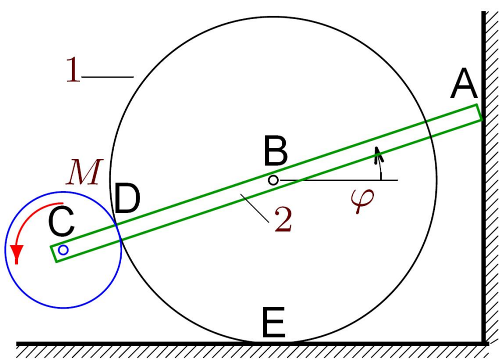
Решение механической задачи с одной степенью свободы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода



30.19. На оси цилиндра радиусом R, массой m_1, шарнирно закреплен стержень длиной L, скользящий одним концом по вертикальной плоскости. На другом конце стержня шарнирно закреплен диск радиусом r, катящийся по внешней поверхности цилиндра. К диску приложен момент M. Качение цилиндра по горизонтальной плоскости происходит без проскальзывания. Масса стержня m_2. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня φ.

Уравнение Лагранжа второго рода для заданной системы имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q. \qquad (1)$$

Кинетическая энергия цилиндра

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1 v_B^2 + \frac{1}{4}m_1 R^2 \omega_{1z}^2,$$

кинетическая энергия стержня

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2 v_B^2 + \frac{1}{24}m_2 L^2 \dot{\varphi}^2,$$

кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}m_1 v_B^2 + \frac{1}{4}m_1 R^2 \omega_{1z}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_B^2 + \frac{1}{24}m_2 L^2 \dot{\varphi}^2. \qquad (2)$$

Выразим линейные и угловые скорости через обобщенную координату. Составим графы, учитывая что скорость точки E равна нулю, т.к. она является мгновенным центром скоростей системы, а также то, что точка A движется только по вертикали.

$$E \xrightarrow{\frac{\pi}{2},R} B$$

$$\left\{\begin{aligned} v_{Bx} &= -R\omega_{1z}\sin\tfrac{\pi}{2}, \\ v_{By} &= R\omega_{1z}\cos\tfrac{\pi}{2}, \end{aligned}\right.$$

$$B \xrightarrow{\varphi,\frac{L}{2}} A$$

$$v_{Ax} = v_{Bx} - \frac{L}{2}\dot\varphi\sin\varphi,$$

$$B \xrightarrow{\pi+\varphi,\frac{L}{2}} C \xrightarrow{\varphi,r} D \xrightarrow{\varphi,R} B$$

$$v_{Bx} = v_{Bx} - \frac{L}{2}\dot\varphi\sin(\pi+\varphi) - r\omega_{2z}\sin\varphi - R\omega_{1z}\sin\varphi.$$

Из полученных выражений выразим необходимые скорости.

$$v_B = v_{Bx} = \frac{L}{2}\dot\varphi\sin\varphi, \tag{3}$$

$$\omega_{1z} = -\frac{\dot\varphi L\sin\varphi}{2R}, \tag{4}$$

$$\omega_{2z} = \frac{\dot\varphi L(1+\sin\varphi)}{2r}. \tag{5}$$

Подставляя полученные скорости в кинетическую энергию получим:

$$T = \frac{1}{16}(3m_1+2m_2)\dot\varphi^2L^2\sin^2\varphi + \frac{1}{24}m_2\dot\varphi^2L^2. \tag{6}$$

Найдём мощность всех сил.

$$N = M\omega_{2z},$$

$$N = \frac{ML\dot\varphi(1+\sin\varphi)}{2r}. \tag{7}$$

Выражение для обобщённой силы

$$Q = \frac{ML(1+\sin\varphi)}{2r}. \tag{8}$$

Уравнение Лагранжа для заданной системы

$$\frac{1}{8}(3m_1+2m_2)\ddot\varphi L^2\sin^2\varphi + \frac{1}{8}(3m_1+2m_2)\dot\varphi^2L^2\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{12}m_2\ddot\varphi L = \frac{ML(1+\sin\varphi)}{2r}.$$