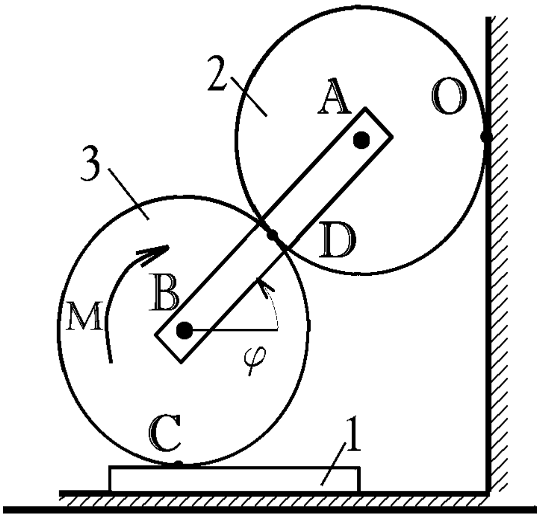
Решение механической задачи с одной степенью свободы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода

Адамов Б.

18 июня 2009 г.



30.11. Оси цилиндров соединены спарником. Верхний цилиндр катится без проскальзывания по вертикальной плоскости. Нижний цилиндр находится в зацеплении с верхним и катится по пластинке массой m_1, скользящей по горизонтальной плоскости. Радиусы цилиндров R. Масса верхнего цилиндра m_2. К нижнему цилиндру приложен момент M. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота спарника φ.

1 Уравнение Лагранжа

Уравнение Лагранжа второго рода для заданной системы имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q. \tag{1}$$

Обобщённую силу будем искать как сумму вкладов консервативных и неконсервативных сил. Соответственно,

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + \widetilde{Q}.$$

Таким образом, для решения задачи необходимо выразить кинетическую и потенциальную энергии как функции обобщённой координаты и скорости

$$T = T(\dot{\varphi}, \varphi), \qquad \Pi = \Pi(\varphi).$$

2 Механическая энергия системы

2.1 Кинетическая энергия

Массивный брусок 1 совершает плоское движение, его кинетическая энергия имеет вид:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_C^2,$$

в то же время верхний цилиндр 2 совершает качение, и его кинетическая энергия выражается по теореме Кёнига:

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_A^2 + \frac{1}{2} J_A \omega_2^2.$$

Нетрудно видеть, что $v_A^2 = (R\omega_2)^2$, заметим также, что $J_A = \frac{1}{2} m_2 R^2$, поэтому:

$$T_2 = \frac{3}{4} m_2 R^2 \omega_2^2.$$

Получаем, что кинетическая энергия системы равна:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 v_C^2 + \frac{3}{4} m_2 R^2 \omega_2^2. \tag{2}$$

2.2 Выражение кинетической энергии через обобщённую координату

Выразим линейные и угловые скорости через обобщенную координату.

Рассмотрим граф

$$C \xrightarrow{\frac{\pi}{2}, R} B \xrightarrow{\varphi, 2R} A \xrightarrow{0, R} O,$$

$$\left\{ \begin{aligned} v_{Ox} &= v_{Cx} - R\omega_{3z} \sin\tfrac{\pi}{2} - 2R\dot{\varphi}\sin\varphi - R\omega_{2z}\sin 0 = 0, \\ v_{Oy} &= R\omega_{3z}\cos\tfrac{\pi}{2} + 2R\dot{\varphi}\cos\varphi + R\omega_{2z}\cos 0 = 0. \end{aligned} \right. \tag{3}$$

Откуда

$$\left\{ \begin{aligned} v_{Cx} &= R\omega_{3z} + 2R\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ \omega_{2z} &= -2\dot{\varphi}\cos\varphi. \end{aligned} \right. \tag{4}$$

Так как цилиндры 2 и 3 не проскальзывают, то возможно составить граф, проходящий через точку их соприкосновения D

$$A \xrightarrow{\pi+\varphi,2R} B \xrightarrow{\varphi,R} D \xrightarrow{\varphi,R} A,$$

$$v_{Ay} = v_{Ay} + 2R\dot{\varphi}\cos(\varphi+\pi) + R\omega_{3z}\cos\varphi + R\omega_{2z}\cos\varphi.$$

Откуда получаем, что:

$$\omega_{3z} = 2\dot{\varphi} - \omega_{2z}.$$

В силу 4 находим проекцию угловой скорости нижнего цилиндра:

$$\omega_{3z} = 2\dot{\varphi}(1+\cos\varphi). \tag{5}$$

Подставив 5 в 4, находим проекцию скорости точки C:

$$v_{Cx} = 2R\dot{\varphi}(1+\cos\varphi+\sin\varphi). \tag{6}$$

С учётом 4 и 6 выражение для кинетической энергии2 примет вид:

$$T = 3m_2R^2\dot{\varphi}^2(\cos\varphi)^2 + 2m_1R^2\dot{\varphi}^2(1+\cos\varphi+\sin\varphi)^2. \tag{7}$$

Обозначим $\mu(\varphi) = \left[3m_2(\cos\varphi)^2 + 2m_1(1+\cos\varphi+\sin\varphi)^2\right]R^2$, тогда

$$T = \mu(\varphi)\dot{\varphi}^2. \tag{8}$$

2.3 Потенциальная энергия

Система находится в поле сил тяжести, причём массивный брусок 1 движется горизонтально.

С точностью до постоянного слагаемого получаем выражение для потенциальной энергии:

$$\Pi = 2m_2gR\sin\varphi. \tag{9}$$

3 Обобщённая сила

$$Q = -\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} + \widetilde{Q} \tag{10}$$

С учётом 9 выразим вклад консервативных сил в обобщённую силу:

$$-\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = -2m_2gR\cos\varphi.$$

Найдём мощность неконсервативных сил:

$$N_{nk} = (\vec{M}, \vec{\omega_4}) = -M\omega_{4z} = -2M\dot{\varphi}(1 + \cos\varphi).$$

Откуда вклад неконсервативных сил в обобщённую силу имеет вид:

$$\widetilde{Q} = -2M(1 + \cos\varphi).$$

Итак, получено выражение для обобщённой силы:

$$Q = -2m_2 gR\cos\varphi - 2M(1 + \cos\varphi). \tag{11}$$

4 Составление уравнения Лагранжа

Подставив 8 и 11 в формулу 1:

$$\frac{d}{dt}(2\mu(\varphi)\dot{\varphi}) - \mu'(\varphi)\dot{\varphi}^2 = Q,$$

получаем уравнение Лагранжа для заданной системы:

$$2\mu(\varphi)\ddot{\varphi} + \mu'(\varphi)\dot{\varphi}^2 = -2M(1 + \cos\varphi) - 2m_2 gR\cos\varphi,$$

$$\mu(\varphi)\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\mu'(\varphi)\dot{\varphi}^2 + M(1 + \cos\varphi) + m_2 gR\cos\varphi = 0.$$

Причём,

$$\mu(\varphi) = \left[3m_2(\cos\varphi)^2 + 2m_1(1 + \cos\varphi + \sin\varphi)^2\right] R^2$$

$$\mu'(\varphi) = \left[-3m_2\sin(2\varphi) + 4m_1(1 + \cos\varphi + \sin\varphi)(\cos\varphi - \sin\varphi)\right] R^2.$$