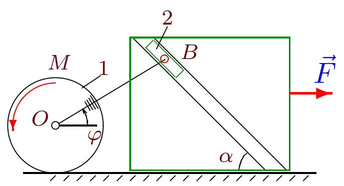
группа А-14-06
Гладкова Елена, 2009

Решение задачи о движении системы с одной степенью свободы с помощью уравнения Лагранжа

Задача 30.3.



Цилиндр радиусом R, массой m_1, катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности. Стержень OB жестко соединен с цилиндром. Ползун B, шарнирно закрепленный на кривошипе, скользит в наклонной прорези призмы, движущейся по гладкой плоскости; $OB = a$. Масса ползуна равна m_2. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа φ.

Решение.

1. Определение кинематических зависимостей

Выразим скорости через обобщенную скорость $\dot{\varphi}$ и обобщенную координату φ.

$$\underset{\varphi}{\overset{a}{O\to\ B}}$$

$$x : v_{Bx} = v_{Ox} - a\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$y : v_{By} = v_{Oy} + a\dot{\varphi}\cos\varphi$$

Скорость цилиндра: $v_O^2 = R^2\dot{\varphi}^2$

Ясно, что $v_{Oy} = 0$, тогда получаем $v_{Ox} = -R\dot{\varphi}$, и следовательно,

$$x : v_{Bx} = -\dot{\varphi}(R + a\sin\varphi)$$

$$y : v_{By} = \dot{\varphi}a\cos\varphi$$

$$v_B^2 = v_{Bx}^2 + v_{By}^2 = \dot{\varphi}^2((R + a\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi)$$

Скорость ползуна: $v_B^2 = \dot{\varphi}^2(R^2 + 2Ra\sin\varphi + a^2)$

2. Нахождение кинетической энергии системы

Энергия плоского движения цилиндра:

$$T_1 = \frac{m_1 v_O^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{m_1 R^2}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4}m_1 R^2 \dot{\varphi}^2$$

Энергия поступательного движения ползуна:

$$T_2 = \frac{m_2 v_B^2}{2} = \frac{1}{2}m_2(R^2 + 2aR\sin\varphi + a^2)\dot{\varphi}^2$$

Энергия системы:

$$T = T_1 + T_2 = \dot{\varphi}^2\left(\frac{3}{4}m_1 R^2 + \frac{1}{2}m_2(R^2 + 2aR\sin\varphi + a^2)\right)$$

Введем обозначения: $A = \frac{3}{4}m_1R^2 + \frac{1}{2}m_2R^2 + \frac{1}{2}m_2a^2$ и $B = m_2aR$. Тогда: $T = \dot{\varphi}^2(A + B\sin\varphi)$

3. Определение обобщенной силы

$$Q = \frac{1}{\dot{\varphi}}(\bar{M}\bar{\dot{\varphi}} + \bar{F}\bar{v_C} + m_2\bar{g}\bar{v_B})$$

$$Q = \frac{1}{\dot{\varphi}}(M\dot{\varphi} + Fv_{Cx} - m_2 g v_{By})$$

где v_C — это скорость призмы. Представляя найденную скорость $\vec{v}_B$ ползуна в виде векторной суммы относительной скорости вдоль прорези и переносной скорости призмы $\vec{v}_C$, получаем

$$v_{Cx} = v_{Bx} + \frac{v_{By}}{\operatorname{tg}\alpha} = \dot{\varphi}\left(\frac{a\cos\varphi}{\operatorname{tg}\alpha} - R - a\sin\varphi\right)$$

$$Q = \frac{1}{\dot{\varphi}}(M\dot{\varphi} + Fv_{Cx} - m_2 g v_{By})$$

$$Q = M - F\left(R + a\sin\varphi - \frac{a\cos\varphi}{\operatorname{tg}\alpha}\right) - m_2 g a\cos\varphi$$

4. Составление уравнения

Уравнение Лагранжа 2-ой степени:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = Q,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 2\dot{\varphi}(A + B\sin\varphi),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 2\ddot{\varphi}(A + B\sin\varphi) + 2\dot{\varphi}^2(B\cos\varphi),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \dot{\varphi}^2(B\cos\varphi).$$

Получаем:

$$2\ddot{\varphi}(A + B\sin\varphi) + \dot{\varphi}^2(B\cos\varphi) = Q.$$

Подстановка A, B и Q дает:

$$2\ddot{\varphi}\left(\frac{3}{4}m_1R^2 + \frac{1}{2}m_2(R^2 + 2aR\sin\varphi + a^2)) + \dot{\varphi}^2(m_2aR\cos\varphi\right) =$$

$$= M - F\left(R + a\sin\varphi - \frac{a\cos\varphi}{\operatorname{tg}\alpha}\right) - m_2ga\cos\varphi.$$