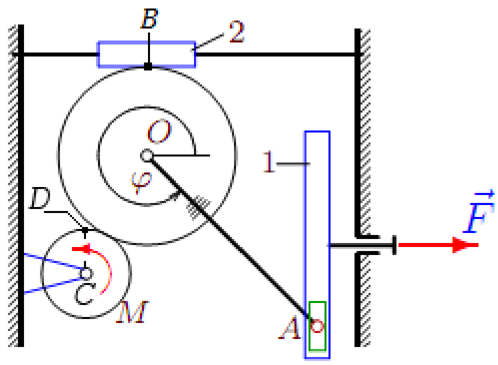
Уравнение Лагранжа для системы с одной степенью свободы

Задача 30.4

Решение выполнил: ст. гр. А-14-06, Зимаков Олег.



Цилиндр радиусом R находится в зацеплении с вращающимся диском радиусом r и горизонтально движущейся муфтой. Кривошип OA жестко соединен с цилиндром. Ползун A, шарнирно закрепленный на кривошипе, скользит в прорези кулисы; $OA = a$. К штоку кулисы приложена горизонтальная сила $\vec{F}$, к диску — момент M. Масса кулисы равна m_1. Масса муфты равна m_2. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа φ.

Решение.

1. Кинематические зависимости

Обозначим как B точку касания муфты и цилиндра. C - центр диска, а D - верхняя точка на поверхности диска.

Будем искать решение как уравнение относительно φ и её производных. Рассмотрим кинематический граф $O \to A$:

$$V_{Ax} = V_{Ox} - a\dot{\varphi}\sin\varphi;\ \ V_{Ay} = V_{Oy} + a\dot{\varphi}\sin\varphi. \tag{1}$$

По условию задачи точка O неподвижна (как и сам цилиндр), поэтому $V_{Ox} = V_{Oy} = 0$. Отсюда мы получаем:

$$V_{Ax} = -a\dot{\varphi}\sin\varphi;\quad V_{Ay} = a\dot{\varphi}\cos\varphi. \tag{2}$$

Ещё один граф $O \to B$. Аналогично предыдущему получим:

$$V_{Bx} = V_{Ox} - R\dot{\varphi}\sin\frac{\pi}{2} = -R\dot{\varphi};\ \ V_{By} = V_{Oy} + R\dot{\varphi}\cos\frac{\pi}{2} = 0. \tag{3}$$

Из этих соотношений, а также из условия задачи, мы получим, что скорость кулисы, очевидно, равна:

$$V_{Ax} = -a\dot{\varphi}\sin\varphi,\ \ V_{Ay} = 0. \tag{4}$$

а скорость муфты (также направленная только вдоль оси x):

$$V_{2x} = -R\dot{\varphi},\ \ V_{2y} = 0. \tag{5}$$

Наконец, выясним угловую скорость ω вращения диска, составив граф $C \to D$:

$$V_{Dx} = V_{Cx} - r\omega\sin\frac{\pi}{2};\ \ V_{Dy} = V_{Cy} + r\omega\cos\frac{\pi}{2}. \tag{6}$$

Здесь, очевидно, скорости центра - нулевые. Отсюда $V_{Dy} = 0$. При этом поступательная скорость на поверхности диска в точке D будет, как нетрудно видеть по рисунку, равна $-V_2x$ (так как диск и муфта касаются цилиндра, а составляющие по y - нулевые). Отсюда имеем:

$$\omega = -\frac{R}{r}\dot{\varphi}. \tag{7}$$

2. Кинетическая энергия системы
По условию задачи указаны массы только для кулисы и муфты, совершающих только поступательные движения. Поэтому выражение для полной энергии системы будет иметь вид:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} \tag{8}$$

Что, в соответствие с результатами (4) и (5) даёт:

$$T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2}(A \sin^2 \varphi + B), \tag{9}$$

где $A = m_1 a^2$ и $B = m_2 R^2$ - значения, не зависящие от φ.

3. Обобщенная сила

$$Q = \frac{1}{\dot{\varphi}}(-\frac{R}{r} M\dot{\varphi} - F V_{1x} - m_2 g V_{2x}) = -\frac{R}{r} M + aF \sin\varphi + m_2 g R. \tag{10}$$

4. Уравнение Лагранжа 2-й степени

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q \tag{11}$$

Имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}(A \sin^2 \varphi + B) \tag{12}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \ddot{\varphi}(A \sin^2 \varphi + B) + \dot{\varphi}(2A \sin\varphi \cos\varphi \dot{\varphi}) = \ddot{\varphi}(A \sin^2 \varphi + B) + \dot{\varphi}^2(A \sin 2\varphi) \tag{13}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\dot{\varphi}^2}{2}(2A \sin\varphi \cos\varphi) = \frac{1}{2} A \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi. \tag{14}$$

Таким образом, подставляя в (11) найденные выражения (10), (13), (14) с учетом обозначений A и B, приводя подобные члены, получим искомое уравнение движения системы:

$$\ddot{\varphi}(m_1 a^2 \sin^2 \varphi + m_2 R^2) + \frac{\dot{\varphi}^2}{2}(m_1 a^2 \sin 2\varphi) = -\frac{R}{r} M + aF \sin\varphi + m_2 g R. \tag{15}$$